This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF
CALIFORNIA

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

BOLLETTINO
DI
BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA
DI

GINO LORIA

ANNO XV
1913

TORINO
ROSENBERG & SELLIER
Via Maria Vittoria, 18
1913

Digitized by Google

Proprietà Letteraria

Pavia - Premiata Tipografia SUCCESSORI FRAT. FUSI.

Digitized by Google

QA1
.S95
v.15-17

INDICE

F. Podetti, La teoria delle proporzioni in un testo del XVII Secolo, p. 1-8, 33-41.
B. Levi, Mario Pieri, p. 65-74.
E. Bortolotti, Sul nome « Algoritmo », p. 97-98.

RECENSIONI ED ANNUNZI

H. Grassmann. Gesammelte Werke, III Bd., I Tl. (G. L.), p. 9. - **C. Hermite**. Oeuvres, T. III. (G. L.), p. 9. — **L. Euleri**. Opera, II Serie, Vol. I e II. (G. L.), p. 10. — **A. W. Stamper**. A History of the Teaching of elementary Geometry. (G. L.), p. 10-11. — **G. Eneström**. Verzeichniss der Schriften L. Eulers, I Lief. (G. L.), p. 11-13. — **U. Amaldi**. I gruppi continui di trasformazioni puntuali (L. Berzolari), p. 13-17. — **A. Markoff**. Wahrscheinlichkeitsrechnung (P. Pizzetti), p. 17-21. — **M. Chini**. Corso speciale di matematiche (G. L.), p. 21-23. — **A. Voigt**. Theorie der Zahlenreihen (G. Vivanti), p. 23. — **N. Nielsen**. Elemente der Funktionentheorie. (G. Vivanti), p. 23-25. — **Günther-Braunmühl-Wieleitner**. Geschichte der Mathematik (G. L.), p. 42-47. — **Whitehead and Russell**. Principia mathematica, Vol. I e II. (G. Peano), p. 47-53 e 75-81. — **L. Zoretti**. Leçons sur le prolongement analytique (G. Vivanti), p. 53-57. — **G. Gallucci**, Le configurazioni (P. del Pezzo), p. 58-59. — **V. und K. Kommerell**, Allg. Theorie der Raumkurven und Flächen. Spezielle Flächen. (G. L.), p. 59. — **L. Crelier**, Systèmes cinématiques. (G. L.), p. 60. — **E. Ciani**, Geom. projettiva ed analitica (R. Torelli), p. 60-63. — **G. Burali-Forti**, Geometria analitico-projettiva (M. Bottasso), p. 81-87. — **G. Hamel**, Elementare Mechanick (P. Burgatti), p. 87-91. — **G. Loria**, Metodi di geometria descrittiva. Poliedri, curve e superficie secondo i metodi della geometria descrittiva (S. Medici), p. 91-93. — **Teixeira**, Obras Vol. II e III. (R. Marcolongo), p. 98-101. — **V. Volterra**, Lectures (G. L.), p. 102. — **H. Vogt**, Geometrie und Oekonomie der Bienezelle (R. Issel), p. 102-106. — **F. Horn**, Partielle Differentialgleichungen (G. Vivanti), p. 106-107. — **G. Kowalewski**, Die komplexe Veränderlichen (G. Vivanti), p. 107-109. — **G. Vivanti**, Analisi infinitesimale (G. L.), p. 109-110. — **D. Gautier**, Mésure des angles. (G. L.), p. 110-111. — **L. Schlesinger**, Lineare Differentialgleichungen (G. L.), p. 111-112. — **F. Cajori**, Approximation to the roots. (G. L.), p. 112-113. — **T. L. Heath**, Diophantus of Alexandria (G. L.), p. 113-116. — **W. B. Frankland**, Theories of parallelism. (G. L.), p. 116-117. — **A. H. Church**, Letters and Papers (G. L.), p. 117. — **H. Poincaré**, Savants et écrivains (G. L.), p. 118. — **M. Lindow**, Technisches Zeichnen (G. L.), p. 118-119. — **W. Voigt**, Clifford'sche Parallelen (G. L.), p. 119-120. **P. B. Fischer**, Koordinatensysteme (G. L.), p. 120. — **G. Lazzeri und A. Bassani**, Elemente der Geometrie (G. L.), p. 120-121. — **W. Gallatly**, The modern Geometry of triangle (G. L.), p. 121. — **G. Scheffers**, Theorie der Kurven (G. L.), p. 121-122. — **E. Eckhardt**, Sphärische Trigonometrie (S. Medici), p. 122-123. — Annuaire du Bureau des longitudes, 1913 (G. L.), p. 123.

7758783

Digitized by Google

RASSEGNA DI RECENTI DISSERTAZIONI DI LAUREA

Bograd, Montfort, Becker, Waesche, pag. 123-126.

PUBBLICAZIONI RECENTI SULLA STORIA DELLE MATEMATICHE

Amodeo, Amodeo e **Cola, Favaro, Celoria,** pag. 94-95.
Amodeo, Ahrens, Arrighi, Bosmans, Cajori, Giacomelli, Simon, Wieleitner, pag. 126-128.

PROGRAMMI E RIASSUNTI DI CORSI UNIVERSITARI

Università di Modena. Analisi algebrica e Calcolo infinitesimale. (**E. Bortolotti**), p. 26-29.

NOTIZIE

C. Méray, E. Wohlwill, Mathematische Bibliothek, Codex Leidensis 399. I. Nuovi modelli matematici. La nostra astronomia secondo un giapponese. Attuaria, p. 30-32. Il I centenario della morte di Lagrange. Tema proposto dalla Università di Halle. Concorso. Il III Congresso internazionale di studi storici. Una utilissima opera bibliografica, p. 63-64. Un trattato d'aritmetica in polacco. Per commemorare l'invenzione dei logaritmi. Un ellissografo giapponese, p. 96. Concorso a premio, p. 128.

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE
ANNO XV, Fasc. I: Gennaio, Febbraio e Marzo 1913

LA TEORIA DELLE PROPORZIONI
IN UN TESTO DEL XVII SECOLO

di
FRANCESCO PODETTI

1. Nel secolo XVII si manifestò, in modo assai evidente, la tendenza di dare alla teoria delle proporzioni un assetto diverso da quello classico che ebbe da EUCLIDE, col sostituire alle definizioni che questi premise alla sua teoria delle proporzioni, ed in particolare alla 5ª ed alla 7ª del quinto libro, altre definizioni che facessero più di quelle diretto appello all' intuizione.

Le ragioni, di natura essenzialmente didattica, che indussero i geometri di quell'epoca a tale sostituzione, sono esposte in modo assai chiaro da GALILEO GALILEI nel suo dialogo: *Sopra le definizioni delle proporzioni d' Euclide* (1), colle parole seguenti: " Dico poi, che per dare una definizione delle suddette grandezze proporzionali la quale produca nell' animo del lettore qualche concetto aggiustato alla natura di esse grandezze proporzionali, dovremmo prendere una delle loro proprietà, ma però la più facile di tutte e quella per appunto che si stimi la più intelligibile anco dal volgo non introdotto nelle matematiche. Così fece Euclide stesso in molt' altri luoghi. Sovvengavi che egli non disse il cerchio essere figura piana dentro la quale segandosi due linee rette, il rettangolo sotto le parti dell' una sia sempre uguale al rettangolo sotto le parti dell'altra; ovvero, dentro la quale tutti i quadrilateri abbiano gli angoli opposti uguali a due retti. Quand' anche così avesse detto, sarebbero state buone definizioni; ma mentre egli sapeva un'altra proprietà del cerchio, più intelligibile della precedente e più facile da formarsene un concetto, chi non s' accorge che egli fece assai meglio a mettere avanti quella più chiara e più

(1) GALILEO GALILEI — Opere . Vol. VIII - Firenze, Barbera, 1898, pag. 349.

Digitized by Google

evidente come definizione, per cavar poi da essa quell'altre più recondite e dimostrarle come conclusioni? „ (1).

E tutto il dialogo è appunto scritto allo scopo di dedurre dalle nuove definizioni in esso contenute, delle relazioni di uguaglianza e diseguaglianza di rapporti fra coppie di grandezze omogenee e da alcuni postulati, la dimostrazione di quelle proposizioni che Euclide assume come definizioni delle relazioni stesse. Segue un breve chiarimento della definizione di *ragione composta* data da Euclide (def. 5ª del VI libro), e una giustificazione di essa fondata sulla proposizione 23ª del VI libro d' Euclide.

Diversi furono i tentativi di modificazione della teoria delle proporzioni nel senso indicato dalla accennata critica del Galileo. Così sappiamo che nel 1634 il matematico reggiano G. Antonio Rocca scriveva a Bonaventura Cavalieri inviandogli una sua " dimostrazione intorno alla def. 5ª del quinto libro „ (2).

Nel 1674 Vincenzo Viviani, curando la prima stampa del citato dialogo del Galileo, pubblicava un: *Quinto libro degli elementi di Euclide, spiegato colla dottrina di Galileo* (3).

Nel 1680 Giordano Vitale da Bitonto nel suo *Euclide restituto* (4), cercava di chiarire il concetto di *ragion composta* dato da Euclide, col renderlo, per i segmenti, indipendente dalla teoria generale delle proporzioni (5).

Ma io qui voglio occuparmi di quello che ritengo il più felice dei tentativi accennati, dovuto a G. Alfonso Borelli, insigne matematico e filosofo di quel tempo. Egli pubblicò nel 1658 un *Euclides restitutus* che ebbe ai suoi tempi notevole importanza, come si può dedurre dal numero delle edizioni che esso ebbe (6), e dal

---

(1) Galileo Galilei — loc. cit., pag. 351.

(2) Lettera di Bonaventura Cavalieri a G. Antonio Rocca — Opere di Galileo Galilei - Vol. XVI - pag. 191.

(3) Firenze — alla Condotta - 1674 - Esiste di quest' opera una ristampa eseguita pure in Firenze nel 1746.

(4) Roma, 1680.

(5) Cfr. l'articolo di G. Vailati nelle: *Questioni riguardanti le matematiche elementari* di F. Enriques (Bologna, Zanichelli, 1912 - vol. I - pag. 220-222).

(6) La terza edizione fu stampata a Roma nel 1679, per opera di Alessandro Falconieri discepolo del Borelli, e fu arricchita di un estratto dei primi quattro libri delle sezioni coniche di Apollonio e di scritti di Archimede.

Digitized by Google

fatto che si riconobbe utile pubblicarne una versione italiana (1). M. CANTOR, nella sua poderosa opera storica, ricorda l'*Euclides restitutus* del Borelli ed accenna all'interesse che presenta la sua lettura, specialmente nei riguardi della teoria delle parallele e della discussa questione degli angoli contingenti (2).

Mi propongo di mostrare qui, come sia degna di essere ricordata anche la teoria delle proporzioni dovuta al Borelli, nella quale, secondo le conclusioni della critica galileiana, egli sostituisce alle definizioni del 5° libro di Euclide altre definizioni, per dedurre poi da queste la dimostrazione delle verità enunciate nelle definizioni euclidee. Ma a differenza del Viviani che si limitò a riportare nel suo: *Quinto libro degli Elementi d'Euclide*, le definizioni e le dimostrazioni usate dal Galileo, lasciando a quasi tutte le altre dimostrazioni la forma stessa che ebbero da Euclide, il Borelli diede alla sua teoria uno sviluppo del tutto nuovo, organico e completo.

E un'altra ragione concorre a rendere notevole la teoria dei rapporti del Borelli. Si sa che la teoria del numeri reali come rapporti di grandezze, trovasi implicitamente sviluppata nel 5° libro di Euclide (3). Nel nuovo assetto che il Borelli diede alla teoria delle proporzioni, troveremo i fondamenti di una teoria sintetica dei numeri reali esposta in modo analogo a quello ben noto seguito dal DEDEKIND nella sua teoria analitica dei numeri reali.

2. A base della sua teoria dei rapporti il Borelli pone tre postulati fondamentali:

Col primo egli ammette la possibilità di dividere una grandezza in qualsiasi numero di parti uguali, e se non troviamo enunciata tale proposizione in modo esplicito, ne troviamo però nu-

---

(1) G. A. BORELLI — *Euclide rinnovato*, volgarizzato da *Domenico Magni, e dall'istesso autore rivisto e corretto* (Bologna, 1663). Questa versione è limitata alla geometria piana. Le citazioni che farò in seguito sono appunto riferite alla versione italiana.

(2) M. CANTOR — « Vorlesung über Geschichte der Mathematik » (Leipzig, 1900, 2° vol. 2ª ediz., pag. 661). Per notizie sulla vita ed opere di G. A. Borelli, oltre alla citata opera del Cantor, cfr. A. FABRONI. *Vitae italorum doctrina excellentium* - (Pisa 1778 - 2° vol. - pag. 227-324).

M. DEL GAIZO — *Contributo allo studio della vita e delle opere di G. A. Borelli* - (Atti dell'Accademia Pontaniana - 1890 - t. 20).

(3) Cfr. l'articolo di F. ENRIQUES su: *I numeri reali*, nelle sue: *Questioni riguardanti le matematiche elementari* - pag. 435 e seguenti.

Digitized by Google

merose applicazioni, ed un chiaro accenno (1) in alcune considerazioni che seguono a titolo di schiarimento l'assioma 3° del III libro, nel quale appunto l'autore svolge la sua teoria dei rapporti.

Nel secondo egli ammette il noto postulato di ARCHIMEDE, ed anche questo senza essere da lui enunciato a parte, è però applicato nel corso di qualche dimostrazione (2).

Infine col terzo egli ammette l'esistenza della quarta proporzionale, e questo viene da lui enunciato negli assiomi 2° e 3° del suo III libro (3).

Vediamo dunque come il Borelli usando del 1° di questi postulati si scosti dal testo euclideo, nel quale la divisibilità delle grandezze non è richiesta dalla teoria delle grandezze proporzionali. E nemmeno Euclide ammette l' esistenza della quarta proporzionale, per quanto nel testo greco si trovi implicitamente ammessa tale esistenza nella dimostrazione della propos.ª 18ª del V libro, risultando con tutta probabilità che l'accennata dimostrazione è dovuta a successive modificazioni operate nel testo euclideo da altri autori (4).

3. Nel libro del Borelli notiamo ancora una diversità formale con Euclide nel modo di introdurre il concetto astratto di rapporto, perchè il Borelli distingue il caso delle coppie commensurabili da quello delle coppie incommensurabili.

Adoperando le espressioni oggi in uso, possiamo riassumere in tal modo la def. 7ª del suo terzo libro:

" Si dirà che una grandezza A ha *rapporto razionale* a un'altra grandezza omogenea B, se esistono due interi assoluti m ed n tali che sia $A = m\frac{B}{n}$. Si dirà invece che A ha *rapporto irrazionale* a B se ogni grandezza omogenea con B e che ha rapporto

(1) « .... di qualsivoglia data quantità si dà ancora qualsiasi molteplice o parte di lei » (pag. 134).

(2) Vedi ad es. la propos. 2ª del III libro (pag. 139).

(3) « Proposte tre quantità, quella proporzione che ha la prima alla seconda, avrà la terza a qualche altra del medesimo genere. E quella proporzione che ha la prima alla seconda avrà qualche altra quantità del medesimo genere alla terza » (pag. 134). Notiamo fin d'ora che il Borelli, come gli altri suoi contemporanei, usa la parola *proporzione* per indicare il *rapporto*, conservando però alla frase *grandezze proporzionali* il significato che ha tuttora.

(4) F. ENRIQUES — Op. cit. - art. VII di G. VAILATI - pag. 213-214.

Digitized by Google

razionale con essa, non può essere uguale ad A, ma è maggiore o minore di A „ (1).

Nel definire l'uguaglianza e la diseguaglianza di due rapporti, egli distingue sempre il caso della commensurabilità da quello dell' incommensurabilità delle coppie di grandezze considerate. Così egli definisce anzitutto l' uguaglianza di due rapporti razionali (def.° 8ª), poi le relazioni di diseguaglianza di un qualsiasi rapporto con un rapporto razionale (def.° 9), indi le relazioni di diseguaglianza di un qualsiasi rapporto con un rapporto irrazionale (def.° 10ª ed 11ª), ed infine l' uguaglianza di due rapporti irrazionali (def.° 12ª).

Possiamo enunciare la def.° 8ª (2) così: " Se A e B è una coppia di grandezze commensurabili, il rapporto razionale di A a B è uguale al rapporto razionale di altre due grandezze commensurabili C e D quando esistano gli interi m e n per cui si abbia $A = m\frac{B}{n}$ e $C = m\frac{D}{n}$ „.

Nella successiva def.° 9ª egli afferma che: " Un qualsivoglia rapporto fra due grandezze omogenee A e B si dirà maggiore del rapporto razionale di C a D, quando essendo A' la grandezza per cui si abbia: $\frac{A'}{B} = \frac{C}{D}$ (3) si abbia $A > A'$; se invece risulterà $A < A'$ si dirà il rapporto di A a B minore del rapporto di C a D „ (4).

---

(1) Il Borelli usa le frasi *proporzione commensurabile* e *proporzione incommensurabile* per indicare le due specie di rapporto. Così per es. la 2ª parte della def. citata dice: « Se niuna altra quantità che abbia commensurabile proporzione alla conseguente, può essere uguale all' antecedente, ma é mai sempre maggiore o minore di quella, si dirà l' antecedente avere alla conseguente proporzione incommensurabile » (pag. 129).

(2) pag. 129.

(3) L'esistenza della grandezza A' viene dal Borelli dedotta tacitamente dall'ammessa possibilità di dividere una grandezza in qualsivoglia numero di parti uguali, e di poterne pure determinare qualsiasi molteplice. L' esistenza della 4ª proporzionale viene naturalmente da lui affermata dopo la definizione generale di proporzione.

(4) « Chiamo la proporzione della 1ª alla 2ª maggiore della proporzione commensurabile dalla 3ª alla 4ª, quando la 1ª avanza quella la quale alla 2ª sta come la 3ª alla 4ª. E dirò la proporzione della 1ª alla 2ª esser minore della proporzione comm.le che ha la 3ª alla 4ª, quando la 1ª è minore di quella che alla 2ª sta come la 3ª alla 4ª » (pag. 130).

Digitized by Google

Con questa definizione il Borelli per confrontare il rapporto $\frac{A}{B}$ col rapporto razionale $\frac{C}{D}$, sostituisce al rapporto $\frac{C}{D}$ il rapporto ad esso uguale $\frac{A'}{B}$, e viene ad ammettere che il rapporto $\frac{A}{B}$ sia maggiore dei rapporti rispetto a B di tutte le grandezze minori di A e commensurabili con B, e minore dei rapporti rispetto a B di tutte le grandezze maggiori di A e pure commensurabili con B.

Tale definizione, quando in essa si sostituisca al concetto generico di rapporto il concetto di numero reale, ed al concetto di rapporto razionale quello di numero razionale, equivale ad ammettere, come nella teoria del Dedekind, che un qualsiasi numero reale definito da una partizione della totalità dei numeri razionali assoluti in due classi, tali che i numeri dell' una siano minori dei numeri dell'altra, ed escluso il numero considerato nel caso che esso sia razionale, sia maggiore dei numeri della 1ª classe e minore dei numeri della 2ª.

4. Nè a questo si limita l' analogia della teoria dei rapporti come é esposta dal Borelli colla teoria dei numeri reali di Dedekind. Vediamo infatti le successive definizioni. Nella 10ª vediamo che: « Si dirà un rapporto maggiore di un rapporto irrazionale, quando il 1° sia maggiore ed il 2° minore di un medesimo rapporto razionale ».

E nella 11ª analogamente stabilisce che: " Un rapporto sarà detto minore di un altro rapporto irrazionale, quando il primo sia minore ed il secondo maggiore di uno stesso rapporto razionale " (1).

Ritroviamo in queste chiaramente le corrispondenti definizioni di diseguaglianza fra due numeri reali α e β definiti mediante due sezioni fatte nell' insieme dei numeri razionali assoluti, secondo le quali si dice $\alpha > \beta$ se esiste un razionale minore di α e maggiore di β, ed $\alpha < \beta$ se esiste un razionale maggiore di α e minore di β.

(1) pag. 131 — A completare queste due definizioni, e per maggiore chiarezza di qualche successiva dimostrazione, avrebbe dovuto il Borelli dimostrare che un rapporto non può essere ad un tempo maggiore e minore di un altro, lacuna questa che si riscontra anche in Euclide.

Digitized by Google

Nella def.ª 12ª viene definita la uguaglianza di due rapporti irrazionali. « Il rapporto di due grandezze omogenee incommensurabili si dirà uguale al rapporto di due altre grandezze, pure omogenee, se il primo rapporto non sarà maggiore nè minore del secondo ».

E tale definizione è seguita a titolo di schiarimento dalle seguenti considerazioni: " Per asserire che quattro grandezze *A*, *B*, *C*, *D* siano proporzionali, essendo le prime due e le ultime due fra loro omogenee ed incommensurabili, occorre che sia impossibile l'esistenza di qualche rapporto razionale fra gli infiniti che si possono assegnare, quale ad es. quello di *E* ad *F*, di tale condizione che il rapporto di *A* a *B* sia maggiore (o minore) di quello di *E* a *F*, mentre che il rapporto di *C* a *D* è minore (o maggiore) di quello di *E* ad *F* „ (1).

In tal modo il Borelli definisce la uguaglianza fra due rapporti irrazionali come vien definita l'uguaglianza fra due numeri reali dati mediante due sezioni fatte nell'insieme dei numeri razionali assoluti, secondo la quale ultima definizione si dice il primo numero uguale al secondo quando ogni numero razionale maggiore (o minore) del primo, è pure maggiore (o minore) del secondo.

5. Le citate definizioni di uguaglianza e diseguaglianza di due rapporti, richiederebbero, nelle dimostrazioni delle successive proprietà dei rapporti, la distinzione del caso della commensurabilità dal caso della incommensurabilità delle coppie di grandezze considerate. Come invece vedremo riportando qualcuna delle dimostrazioni che il Borelli dà nel suo III libro, egli non fa tale distinzione. Ogniqualvolta debba dimostrare la diseguaglianza di due rapporti, egli ricorre alle def. 10ª ed 11ª qualunque sia il secondo rapporto, in luogo di ricorrere alla def. 9ª nel caso che il secondo rapporto sia razionale ed alle altre due ora ricordate in caso diverso. Così egli dimostra sempre la uguaglianza di due rapporti ricorrendo in ogni caso alla def. 12ª; in luogo di distinguere il caso delle coppie commensurabili, la cui uguaglianza è definita nella def. 8ª, da quello delle coppie incommensurabili.

Con ciò il Borelli viene ad ammettere tacitamente alcune intuitive proprietà dei rapporti; così, ad es., col supporre che le def^{i}.

(1) pag. 133.

Digitized by Google

10ª ed 11ª estese a due rapporti qualsiasi razionali ed irrazionali, includano come caso particolare la def. 9ª quando il secondo rapporto sia razionale, egli viene ad ammettere che per la relazione di disuguaglianza data nella def. 9ª valga la proprietà transitiva, per cui dalle relazioni $\frac{A}{B} > \frac{E}{F} > \frac{C}{D}$, quando $\frac{E}{F}$ e $\frac{C}{D}$ siano razionali, si possa dedurre $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$ secondo la stessa def.ª 9ª.

E mentre egli dimostra, seguendo in ciò Euclide, la proprietà transitiva dell'eguaglianza di due rapporti qualsiasi (1), egli ammette senza dimostrazione che la diseguaglianza di due rapporti da lui definita nelle def. 10ª ed 11ª, goda della proprietà transitiva, proprietà che egli applica molte volte nelle dimostrazioni del III libro.

Queste ommissioni (2) dovute alla non ancor sentita necessità di un assoluto rigore, cosa non rara ai tempi in cui scriveva il Borelli, non tolgono però pregio alle successive dimostrazioni del suo III libro, e l'uniformità del metodo da lui seguito rende più viva l'analogia della sua teoria dei rapporti colla teoria dei numeri reali del Dedekind, nella quale l'uguaglianza e la diseguaglianza vengono definite in modo uniforme, siano i numeri considerati razionali od irrazionali.

---

(1) libro III, prop. 7ª.

(2) Non è difficile dedurre dagli ammessi postulati, la dimostrazione delle proposizioni intuitive che il Borelli ommette. Così per dimostrare che la def.ª 12ª relativa alla uguaglianza di due rapporti, estesa al caso in cui questi due rapporti siano razionali, include in sè la def.ª 8ª, basterà dimostrare che se $\frac{A}{B}$ e $\frac{C}{D}$ sono due rapporti razionali pei quali non esiste alcun rapporto razionale maggiore di uno di essi e minore dell'altro, dovrà essere $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ secondo la def.ª 8ª. Indicando con A' quella grandezza commensurabile con B e tale che sia, secondo la def.ª 8ª, $\frac{A'}{B} = \frac{C}{D}$ dovrà pur essere $A = A'$. Perché se fosse ad es. $A' > A$, come conseguenza del postulato di Archimede e della divisibilità in parti eguali, ne verrebbe l'esistenza di una grandezza E commensurabile con B, e tale che $A' > E > A$, quindi (def. 9ª) $\frac{A'}{B} > \frac{E}{B} > \frac{A}{B}$ per modo che si avrebbe $\frac{E}{B} < \frac{C}{D}$, essendo $\frac{A'}{B} = \frac{C}{D}$ ed $E < A'$. Cioè il rapporto razionale $\frac{E}{B}$ sarebbe minore di $\frac{C}{D}$ e maggiore di $\frac{A}{B}$ contro alla ipotesi fatta. (*Continua*)

Digitized by Google

Opere Complete ed Enciclopedie.

H. GRASSMANN. — *Gesammelte mathematische und physikalische Werke.* III Band, I Teil. Mit. 16 Figuren im Text. Leipzig, Teubner 1911 8°. gr. p. 353. (Prezzo, Mk. 18).

Questa importante pubblicazione (cfr. *Bollettino,* T. VI, 1903, p. 89; T. IX, 1906, p. 21; T. XIV, 1912, p. 73) col presente semivolume è completo. Questo, infatti contiene gli ultimi scritti di cui venne decisa la pubblicazione; sono il " Prüfungsarbeit " sopra la teoria del flusso e riflusso (la cui importanza è ben superiore e quella che farebbe credere l'essere desso un lavoro scolastico, giacchè contiene in germe le idee fondamentali del calcolo geometrico) e poi parecchi lavori inediti di fisica matematica. Curarono il testo uno dei figli dell'illustre geometra (Giusto) ed il Prof. Engel. G. L.

Oeuvres de CHARLES HERMITE *publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences par* E. PICARD. T. III. Paris, Gautier-Villars 1912, 8°, p. 522. (Prezzo, Fr. 18).

Questo nuovo volume (cfr. *Bollettino* T. IX p. 38 e T. XI p. 11) delle opere del grande analista francese contiene le memorie da lui pubblicate nel periodo 1872-1880; a dimostrare quanto felicemente fecondo sia stato tale periodo basti rilevare che appartengono ad esso la celebre memoria *Sur la fonction exponentielle* e le non meno celebri note *Sur quelques applications des fonctions elliptiques.* Ma il volume in questione offre qualche gustosa sorpresa anche a coloro che ritenevano conoscere per intero la produzione dell'Hermite; infatti in esso si trova pubblicato per la prima volta una memoria *Sur l'extension du théorème de M. Sturm à un système d'équations simultanées,* presentato all'Accademia delle Scienze di Parigi addì 12 Luglio 1852 e ritrovato fra le carte di Liouville; vi si trovano inoltre alcuni fogli litografati contenenti una lezione fatta alla Scuola politecnica nell'inverno 1872-73 *Sur l'équation de Lamé,* da considerarsi come il primo saggio di ricerche che occuparono Hermite a lungo e con grande vantaggio per la scienza.

Il volume in questione va adorno di un bellissimo ritratto dell'autore, che lo riproduce all'età di 65 anni circa.

Il Bourget ha riveduti tutti i calcoli esposti e in qualche luogo vi ha rilevate ed in parte corrette alcune inesattezze.

G. L.

Digitized by Google

LEONHARDI EULERI, *Opera Omnia*. Serie II. Vol. I, II. L. EULERI, *Mechanica, sine motus scientiae analytice exposita, edidit*. P. STAECKEL. Lipsiae et Berolini. B. G. Teubner. 1912.

Questi due nuovi volumi della grande edizione euleriana (cfr. *Bollettino*, T. XIV,1913, p. 35) varranno a far meglio conoscere una opera che, dopo la comparsa della *Mécanique analytique* di Lagrange, non reclutava lettori che fra i dilettanti di ricerche erudite. Nella succosa prefazione che vi premise lo Stäckel viene data notizia dell'accoglienza che ricevette al suo primo apparire e vengono esposte le ragioni per cui è tuttora meritevole di studio. In testa al primo volume è riprodotto il bellissimo ritratto di Eulero inciso dal suo compatriota F. Weber.

G. L.

Storia.

ALVA WALKER STAMPER, *A History of the Teaching of elementary Geometry*. (Teachers College, Columbia University Contributions te education, N. 23). New-York, 1909. 8°. p. X + 163.

Le informazioni attendibili intorno all'evoluzione successiva dell'insegnamento matematico sono così scarse che salutiamo con piacere l'apparizione di questa Dissertazione di Laurea, composta sotto la direzione e con l'ajuto del Prof. D. E. Smith e destinata a far comprendere lo stato passato e lo stato presente dell'insegnamento della geometria in tutto il mondo civile. Per porgere una idea ai nostri lettori dell'architettura di questo volume ne riferiremo il piano:

Cap. I. L'insegnamento della geometria prima di Euclide. *Cap. II.* L'opera di Euclide e la sua influenza sopra l'insegnamento della geometria. *Cap. III.* L'insegnamento della geometria da Euclide al sorgere delle scuole cattoliche. *Cap. IV.* L'insegnamento della geometria dal sorgere delle scuole cattoliche all'anno 1525. *Cap. V.* L'insegnamento della geometria dall'anno 1525 ad oggi. *Cap. VI.* L'insegnamento della geometria al giorno d'oggi. *Cap. VII.* Attuali problemi offerti dall'insegnamento della geometria e loro legami storici.

L'A. si è accinto a scrivere questo libro dopo avere raccolte in Europa esaurienti notizie sopra la letteratura relativa; ma come, è ben naturale, nel breve giro di circa 150 pagine, non potè che sfiorare molte questioni. Siccome del suo scritto il

Digitized by Google

piano è soddisfacentissimo, così noi auguriamo che il pubblico matematico gli faccia così festose accoglienze da render necessarie nuove edizioni e che egli si dimostri degno di tale favore estendendo ed approfondendo le proprie indagini.

Noi intanto vogliamo segnalare un punto particolare su cui dovrebbe rivolgersi la sua attenzione. È noto che l'insegnamento della geometria in Inghilterra fu sempre governato dal codice euclideo, tanto che neppur oggi si può dire che tale stato di cose, malgrado gli sforzi che da tempo si vanno facendo, sia radicalmente mutato. È per ciò notevole il fatto che nel 1824 sia stata pubblicata colà una traduzione in Inglese degli *Eléments de géométrie* del Legendre; e la cosa è tanto più notevole quando si sappia che l'autore della traduzione fu Tommaso Carlyle (1), il quale, versando allora in difficili condizioni finanziarie, accettò con riconoscenza le 50 lire sterline che David Brewster gli offrì per tale lavoro. La traduzione uscì sotto il nome di questo; ma tale occupazione esercitò tale influenza sopra il Carlyle che egli ne ebbe lo stimolo ad un lavoro originale, una nuova teoria delle proporzioni, che egli scrisse in una mattinata per sostituire il V. Libro di Euclide! Ora se tutto ciò è interessante per chi brami formarsi un'idea completa della mentalità del Carlyle, lo storico della matematica rimane col desiderio di sapere quale accoglienza abbia ricevuta la fatica del sommo storico; il fatto che se ne fece *una sola edizione* e che il regno di Euclide continuò indisturbato sembrano sintomi sufficienti per concludere che i risultati non furono considerevoli; ma resta da sapere se la traduzione del Carlyle venne sepolta sotto la universale indifferenza oppure se essa dovette soccombere in seguito ad un'aspra lotta. Sono questi probblemi che s'impongono a chi intende narrare completamente l'evoluzione dell'insegnamento geometrico in Inghilterra e che raccomandiamo al sig. Stamper per una nuova edizione del suo ottimo libro. G. L.

GUSTAV ENESTRÖM, *Verzeichniss der Schriften Leonhard Eulers.* Erste Lieferung. Leipzig, B. G. Teubner, 1910, 8°. p. 208. (Prezzo, Mk. 10).

Un primo tentativo di redigere un Catalogo completo delle

(1) La maggior parte dei particolari qui riferiti provengono dal mio dotto amico Sir T. L. Heath, a cui io avevo segnalato il fatto curioso che il Carlyle meritava un posto nella storia della matematica, che finora gli fu negato; molti di essi furono da lui tolti dal *Budget of paradoxes* del de Morgan.

Digitized by Google

pubblicazioni di Eulero venne fatto poco dopo la morte del grande analista svizzero; vi si accinse il fedele suo discepolo N. Fuss quando l'Accademia di Pietroburgo lo incaricò di tesserne l'elogio. Per quanto imperfetto, esso servì di base agli scritti congeneri posteriori, fra cui va ricordato come pregevole quello dell'Hagen. Ora i lavori preparatori dell'edizione completa definitiva delle *Opere di Eulero* esigevano ne venisse compilato un Elenco esente da lacune e capace di servire come sicura base alla colossale impresa. Ne fu incaricato l'Enestrom, indicatissino per la sua competenza e generica e specifica. Come primo frutto delle sue fatiche ci si presenta questo fascicolo (destinato a far parte del IV. Volume complementare dei *Jahresberichte der Deutschen Matematiker-Vereinigung)*, il quale contiene i titoli di tutti i lavori pubblicati da Eulero, disposti in ordine cronologico, in base all'anno di pubblicazione (dal 1726 al 1905). Di ciascuno viene indicato con diplomatica fedeltà il titolo e sono segnalate, non solo l'edizione primitiva, ma eziandio le eventuali ristampe e traduzioni. Chi conosce la diligenza e la grande competenza bibliografica dell'Enestrom non si stupirà se diremo che questa sua fatica è capace di soddisfare tutti e pienamente. Per l'avvenire egli ci promette di continuare l'opera iniziata dandoci cataloghi analoghi ordinati in base alla data di compilazione od alla materia. G. L.

R. Guimaraes, *Les mathématiques en Portugal. Appendice II.* Coïmbre, 1911. 8°. p. 107.

Questo volume è destinato a servire di *supplemento* e *complemento* ad un'opera su cui per due volte richiamammo l'attenzione dei nostri lettori (*Bollettino* T. III, 1900, p. 111 e T. XIII, 1911, p. 5). Di *supplemento* perchè dà notizia di alcuni scritti che erano stati dimenticati o che apparvero nel biennio 1909-10; di *complemento* per gli accurati ed utilissimi indici con cui si chiude: Indice cronologico dei lavori citati, Indice alfabetico degli autori, Indice generale di tutta l'opera. Questa pertanto risulta notevolmente migliorata dall'Appendice annunciata con le presenti linee. G. L.

D. Pantanelli, *Domenico de' Corradi d'Austria. Una pagina di storia dell'Idraulica.* Discorso inaugurale dell'anno accademico

Digitized by Google

1911-12 pronunciato nella R. Università di Modena il 4 novembre 1911. Bologna, Zanichelli, 1911, 8°, p. 45.

Domenico de' Corradi d'Austria, di famiglia mantovana, nacque in Modena il 5 novembre 1677. Fu matematico alla corte di Modena, soprintendente delle miniere di ferro in Garfagnana, commissario generale d'artiglieria, colonnello, e poi generale, della stessa arma, presidente del consiglio delle fortificazioni. Morì l'8 maggio 1756. Ebbe parte importante nelle discussioni che si agitarono nella prima metà del sec. 18° intorno alla questione dell'immissione del Reno in Po; fu tra i primi in Italia ad istituire osservazioni pluviometriche. Lasciò lavori notevoli d'Idraulica, ed altre memorie riguardanti l'Ottica, l'Idrostatica, la Chimica delle polveri piriche. Nella storia della Matematica merita di essere ricordato (e lo è dal Riccardi) come autore di un trattato di calcolo infinitesimale *(De' calcoli differenziale e integrale. Memorie analitiche.* 2. vol. Modena, Torri, 1743-44), che fu il primo scritto in Italia e precedette di parecchi anni quello classico di Maria Gaetana Agnesi. Il Pantanelli nota in quest'opera una soverchia prolissità ed una qualche incertezza nei concetti fondamentali, e deplora l'enorme quantità di errori di stampa, che senza dubbio contribuì a diminuirne la diffusione; ma loda nell'autore l'abitudine, non seguita dalla Agnesi, di apprezzare debitamente l'opera dei predecessori, e fa merito ad esso di aver riconosciuto negli indivisibili di Cavalieri il germe primo del calcolo leibniziano.

G. Vivanti

Gruppi di trasformazioni.

Ugo Amaldi, *I gruppi continui infiniti di trasformazioni puntuali dello spazio a tre dimensioni.* (Memoria della R. Acc. di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Serie III, Vol. X, 1911-12).

Questo importante lavoro venne premiato dal R. Istituto Lombardo nell'adunanza del 9 Dicembre 1909 in seguito alla seguente Relazione:

Il tema del Concorso per la matematica proposto dall'Istituto per il 1909, era così formulato (*Rendiconti*, serie II, vol, XLI, p. 6):

La teoria dei gruppi di trasformazioni, fondata specialmente dal Lie *e sviluppata nell'ultimo trentennio, si è mostrata feconda delle più svariate applicazioni alla geometria e all'analisi matema-*

Digitized by Google

tica. Il lavoro dovrà portare un contributo ed un perfezionamento notevole ed originale a questa importante teoria.

Al concorso si è presentato un solo Autore, col motto *ohne Hast, ohne Rast,* e con un lavoro in lingua italiana dal titolo *I gruppi continui infiniti di trasfornazioni puntuali dello spazio a tre dimenzioni.*

La Memoria manoscritta, è in tre fascicoli di complessive pagine IX-458.

Nella prefazione l'A. osserva, che mentre la teoria dei gruppi continui finiti ha raggiunto, sopratutto per merito del suo fondatore, un notevole grado di compiutezza così nei metodi come nei risultati, lo stesso non può dirsi della teoria generale dei gruppi continui infiniti, malgrado gl' importanti lavori dello stesso LIE dell'Engel, del Medolaghi, del Vessiot, del Cartan.

Da questa considerazione fu indotto a scegliere come argomento del suo lavoro *la determinazione di tutti i gruppi continui infiniti di trasformazioni puntuali (analitiche) dello spazio a tre dimensioni,* pensando a ragione che " non dovesse mancare ogni " interesse ad una ricerca, che, nell'ordine stesso dei lavori del " LIE, fosse diretta ad arricchire le nostre conoscenze sui gruppi " continui infiniti di un insieme organico di esempi concreti e di " illustrazioni determinate ".

Effettivamente l'interesse del problema propostosi dall'Autore, già notevole per se, è accresciuto dalla circostanza che piuttosto scarsi sono i gruppi continui infiniti dello spazio finora noti, riducendosi essi a quelli del Medolaghi e ad alcuni enumerati recentemente dal Levavasseur.

D'altra parte il problema stesso non è scevro da difficoltà, sulla natura delle quali non è neanche dato aver molta luce dalla nota soluzione del Lie per l'analogo problema intorno ai gruppi infiniti piani, giacchè, eccezion fatta per tre casi particolari, gli elementi arbitrari da cui questi dipendono sono soltanto costanti isolate e funzioni d'un solo argomento non legate tra loro da equazioni differenziali, contrariamente a ciò che avviene per i gruppi dello spazio.

Poichè si sa che i gruppi continui infiniti *primitivi* dello spazio sono riducibili a pochi tipi ben noti (cioè, oltre che al gruppo puntuale totale, ai gruppi delle trasformazioni equivalenti, delle trasformazioni proporzionali, delle trasformazioni di contatto del piano), l'A. può limitar la sua ricerca a quella dei gruppi

Digitized by Google

imprimitivi. E poichè nello spazio ordinario sono possibili due modi di imprimitività secondo che il gruppo trasformi in sè un sistema ∞^1 di superficie o un sistema ∞^2 di curve, quella ricerca si scinde spontaneamente in due, vôlte, rispettivamente alle due classi di gruppi imprimitivi. Può ben dirsi che un medesimo tipo di gruppi si presenti, sotto forme diverse, sì nell'una che nell'altra di queste classi, ma ciò non costituisce un sostanziale inconveniente, in quanto che noti procedimenti permettono in ogni caso di decidere se un gruppo goda o no di quella proprietà.

Per determinare i gruppi della prima classe, l'Autore osserva che si può sempre ridursi al caso in cui il sistema invariante di superficie sia il fascio di piani $z = costante$. In questo caso, detto G uno qualunque dei gruppi cercati, ad esso sono *associati* due gruppi che in certo modo ne caratterizzano la struttura, e sono il gruppo in una sola variabile secondo cui G trasforma gli uni negli altri i piani del sistema invariante, e il sottogruppo di G *(sottogruppo invariante)* che lascia fermo ogni singolo piano del sistema. Poichè i gruppi di questi due tipi sono tutti noti per le ricerche del Lie, componendo opportunamente gli uni con gli altri, l'A. può da essi risalire alla costruzione di tutti i gruppi G.

Per la ricerca dei gruppi della seconda classe, si può similmente ridursi al caso, in cui la conseguenza invariante di curve sia la stella delle rette parallele dell'asse z. Qui pure, ad uno qualunque $\overline{G}$ dei gruppi richiesti sono allora *associati* dei gruppi, di cui l'uno *(gruppo accorciato)*, in due variabili, permuta tra loro le rette della stella invariante, l'altro è il sottogruppo di $\overline{G}$ *(sottogruppo invariante)* che lascia ferma ogni singola retta della stella. Ora i primi di tali gruppi sono stati assegnati dal Lie; degli altri invece non si conosceva sino ad ora che l'elenco non del tutto completo datone dal Levavasseur; epperò il nostro Autore, in una digressione cui è consacrato il Capitolo V, deve eseguirne la determinazione *ex novo:* dopo di che, associando convenientemente tra loro i gruppi dei due tipi, riesce a costruire tutti i gruppi $\overline{G}$.

L'esame dei numerosissimi casi che si possono presentare costringe l'Autore ad una discussione la quale riesce molto laboriosa, e sovente malagevole, sopratutto per i gruppi della seconda classe, e richiede l'impiego di svariati artifizi. Astraendo

Digitized by Google

però dai procedimenti che sogliono esser più comuni in questo genere di ricerche, le idee; che nel presente lavoro maggiormente sono in gioco si riducono a due; e di esse diremo ora brevemente.

La considerazione delle trasformazioni infinitesime appartenenti ad un gruppo continuo infinito porta a caratterizzare uno di tali gruppi dello spazio per mezzo di tre sistemi (o *spazio*) lineari di funzioni, mutuamente vincolati da determinate corrispondenze lineari espresse da equazioni differenziali, e dei quali uno almeno è ad infinite dimensioni, ossia contiene funzioni arbitrarie. Lo studio di codeste equazioni differenziali in ognuno dei casi che a mano a mano si presentano, ha ufficio essenziale nella risoluzione del problema affrontato dall'Autore; e poichè le corrispondenze lineari cui esse equivalgono sono generalmente multiple, ed anzi per lo più infinitiformi, egli si trova condotto a valersi del concetto di *congruenza* rispetto a moduli funzionali.

L'uso sistematico di questo concetto in questioni gruppali, e, più ancora, il largo ricorso che per tali questioni è qui fatto ai concetti ed ai metodi del Calcolo funzionale distributivo, quale fu ideato ed elaborato dal Pincherle, costituiscono, quanto al metodo, l'aspetto più notevole della Memoria che stiamo esaminando.

Non vuolsi veramente passar sotto silenzio che, appunto per questioni della teoria dei gruppi, già in qualche altro lavoro si è fatto appello ai metodi del Calcolo funzionale: sopratutto se n'è giovato l'Amaldi (1901) per l'integrazione di speciali sistemi di equazioni differenziali lineari in due variabili, che si presentano nella ricerca — affine a quella intrapresa dal nostro Autore — dei gruppi continui *finiti* di trasformazioni dello spazio. Ma può ben dirsi che non mai come nella presente Memoria quelle considerazioni erano state utilizzate con tanta estensione, così da formare quasi l'essenza del metodo e conferir loro in certo modo il carattere di necessità. Segnaliamo tra gli altri i Capitoli IX X, come dotati di particolare interesse per la natura così dei gruppi che vi si costruiscono come dei sistemi di equazione differenziali che vi si studiano o si portano all'integrazione.

Del resto, tutto quanto il lavoro dimostra che l'Autore possiede in modo pieno e sicuro non soltanto la teoria del Lie, ma quelle ancora che con essa più o meno direttamente si collegano, e che di tutte sa servirsi con perizia non comune. Degna di encomio è altresì l'esposizione, la quale pur nel viluppo delle

Digitized by Google

minuziose discussioni richieste dalla molteplicità dei casi esaminati, corre agile e limpida, senza ingenerar mai nel lettore alcun senso di tedio o pesantezza.

Certamente non manca qualche punto dove la trattazione, per confessione stessa dell'Autore, riesce meno compiuta o non riveste ancora la forma definitiva. Ma a codeste, che ad ogni modo son piccole mende, potrà facilmente provvedere l'Autore prima della stampa: e nel giudicarne è doveroso tener conto del lavoro ingente condotto a termine in un lasso di tempo relativamente ristretto.

Vien fatto piuttosto di domandarsi se codesto lavoro non sarebbe stato suscettibile di riduzioni eventualmente per mezzo di un qualche principio direttivo d'indole generale. Ma d'altro lato è pur forza riconoscere che semplificazioni considerevoli non saranno forse possibili se non allorquando la teoria generale dei gruppi infiniti si sarà composta in un assetto organico e definitivo, che possa paragonarsi con quello raggiunto dalla teoria dei gruppi finiti.

Concludendo l'Autore con l'uso di procedimenti non destituiti di originalità ha risolto, nella teoria dei gruppi infiniti del Lie, un problema complesso non meno che istruttivo e interessante. Perciò la Commissione propone con voto unanime che a lui sia conferito il premio dell'Istituto per il 1909 „.

L. Berzolari.

Questa Relazione venne letta e approvata nell'adunanza del 9 dicembre 1909.

Probabilità.

A. A. Markoff. *Wahrscheinlichkeitsrechnung, nach der zweiten Auflage des russischen Werkes von* Heinrich Liebmann. Leipzig u. Berlin, Teubner, 1912. Un volume di pag. 318 + VII. [Prezzo, Mk. 12, leg. Mk. 13].

Il calcolo delle probabilità trae la sua prima ragione di esistenza da problemi naturali, e coi postulati che in tali problemi si presentano volta per volta come naturali e necessarii è connesso il valore delle trattazioni teoriche che il calcolo stesso imprende a svolgere. Sarebbe pertanto sterile esercizio di tecnica analitica lo studiare la teoria delle probabilità come un ramo di

Digitized by Google

matematica pura. Ma d'altra parte non è piccolo il contributo che i progressi dell'analisi matematica possono apportare a questa teoria nel senso di dare con precisione la dimostrazione dei teoremi fondamentali e di giustificare i metodi di approssimazione ai quali il più delle volte è indispensabile ricorrere nella risoluzione dei problemi.

Per questo rispetto è fuor di dubbio che i calcoli dei grandi Geometri che hanno fondato la teoria delle probabilità aveano bisogno di venire sottoposti a critiche e di essere corroborati da dimostrazioni più rigorose. E in questo ordine d'idee appunto sono note e giustamente apprezzate le ricerche di Cebyceff e i contributi che, dietro le orme di lui, i Signori Liapounoff e Markoff della Accademia Imperiale di Pietroburgo hanno apportato a questa tanto interessante teoria.

Il libro in esame è appunto, come l'A. ci avverte nella sua prefazione, rivolto sopratutto alla trattazione dei problemi di probabilità, in quanto questi danno luogo a ricerche di pura analisi. Quindi nè un dettagliato studio delle varie applicazioni, nè una minuta discussione dei principii filosofici che stanno a base della definizione e dei teoremi della probabilità.

Il libro è evidentemente indirizzato a persone già pratiche dei principii di questa teoria e dei relativi problemi. Non crediamo infatti che un principiante potrà facilmente orientarsi nella lettura di un libro nel quale, fin da principio, problemi, come quello elementare della estrazione di una palla da un'urna, che d'ordinario si presentano come i più semplici, vengono con ingegnoso artificio complicati, per dar modo di stabilire il seguente *assioma d'indipendenza*: Se in base a determinate ipotesi i casi p, q, ... u, v sono egualmente possibili e taluni di essi sono favorevoli al verificarsi di un avvenimento A, altri sono contrarii, quando l'avvenimento A sia verificato, risultano esclusi tutti i casi ad esso contrario, e i rimanenti restano come prima egualmente possibili.

Enunciato interessante senza dubbio, ma del quale un principiante difficilmente potrà afferrare il significato e la portata.

Non, dunque, libro da scolari, ma da maestri; libro ineguale e incompleto ove lo si consideri come un *trattato*; ma denso d'idee e ben adatto a far progredire la conoscenza della difficile materia; libro che porta in ogni sua parte l'impronta di una mente acuta e di un forte potere analitico

Digitized by Google

***

Nel I° Capitolo, ammesso, come postulato il concetto di *casi egualmente possibili* (quando non c'è ragione a priori per attendere l'un d'essi piuttosto che l'altro) e ammesso pure che per gli avvenimenti che si considerano sia possibile la suddivisione delle ipotesi in casi elementari tutti egualmente possibili, favorevoli o no all'avvenimento, vien data, al solito modo, la definizione della probabilità matematica. Segue il già ricordato esempio dell'*urna*, e quindi i teoremi della somma e del prodotto della probabilità.

Nel II° Capitolo è trattata la teoria della probabilità dei *risultali di prove ripetute* nel caso generale in cui la probabilità dell'avvenimento varii da una prova all'altra. Restringendosi poi al caso della probabilità costante, vien dimostrato il *teorema di Bernoulli* sul risultato limite di un numero infinitamente grande di prove ripetute. La dimostrazione è la solita approssimata di Laplace, la quale, come l'Autore stesso ammetto, non fornisce alcun apprezzamento sulla grandezza delle quantità che si trascurano. E poichè qualche cosa si trascura in ogni termine di una somma di un numero infinito di termini, può ben dirsi che la dimostrazione riesce del tutto insufficente (1).

Ad una precisa e rigorosa dimostrazione sia dal teorema di Bernoulli, sia di quelle più generali di Poisson (*legge dei grandi numeri*) si giunge invece nel Capitolo III°, partendo dalla così detta *diseguaglianza di Cebyceff*. Occorre innanzi tutto stabilire la definizione e i teoremi fondamentali relativi a quella che l'A. chiama *speranza matematica* di una grandezza accidentalmente variabile: vale a dire la *somma di tutti i possibili valori che questa grandezza può assumere moltiplicati per le rispettive probabilità*. Ci permettiamo, in questa recensione, di sostituire alla espressione *speranza matematica* l'altra tanto più semplice, più naturale e più concisa di " *valor medio* „. La diseguaglianza di Cebyceff si

(1) Mi permetto di ricordare che negli Atti della R. Accademia di Torino (1908) ho completata la dimostrazione di Laplace con un calcolo che la rende rigorosa e che fornisce anche un limite superiore dell'errore che si commette quando si adoperi il ben noto *integrale* per valutare la probabilità che il risultato di un *grande* numero di prove ripetute cada entro certi limiti.

Digitized by Google

enuncia così: X, Y,... W quantità variabili indipendenti fra loro, a, b,... l, loro valori medii; a_1, b_1,... l_1 i valori medii dei loro quadrati; posto $A = a_1 a^2 + b_1 b^2 + \ldots l_1 l^2$, le probabilità che la somma $X + Y + \ldots + W$ cada fra i limiti $a + b + \ldots + l - t\sqrt{A}$ e $a + b + \ldots + l + t\sqrt{A}$ è maggiore di $1 - \frac{1}{t^2}$. Segue quindi la ricerca di un'espressione limite o assintotica della probabilità che la differenza $X + Y + \ldots + W - (a + b + \ldots + l)$ sia compresa entro i limiti $t_1\sqrt{A}$, $t_2\sqrt{A}$. Questa espressione limite è.

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-x^2} dx$$

La dimostrazione procede secondo un metodo approssimato e non vi ha, come l'A. stesso ammette una assegnazione del limite dell'errore cui l'approssimazione è soggetta. Ma la dimostrazione rigorosa di questa espressione assintotica si ha (almeno nel caso particolare $a = b = \ldots = l = 0$) per mezzo delle formole della *Appendice I*, che non è altro che la traduzione di una Memoria dell'A. pubblicata nel 1898 nel Bull. de l'Acad. Imp. de S. Petersbourg. Le altre due *Appendici*, che seguono questa estendono il teorema a casi in cui le X, Y... non siano del tutto indipendenti fra loro.

Il capitolo termina con semplici ma interessanti considerazioni sul rischio nelle imprese aleatorie e nei giuochi d'azzardo in particolare.

Il Cap. IV è dedicato alla trattazione di classici problemi; come quelli generali sulle estrazioni ripetute di palle di varii colori da un'urna, quelli detti della *rovina dei giuocatori*, quelli relativi alla *durata* del gioco, quello dei *dadi* sotto la forma più generale di Moivre (probabilità che la somma di m numeri presi a caso e con possibile ripetizione fra i primi n interi abbia un certo valore o sia compresa entro certi limiti). Le trattazioni di tali problemi si distinguono per la generalità delle ipotesi, per la eleganza delle soluzioni e per la ingegnosa ricerca di formole approssimate del caso di grandi numeri.

Varii problemi relativi alla probabilità con numero infinito di casi, e in particolare alla probabilità geometrica, son trattati nel Cap V; citeremo fra gli altri, come meno comuni, quello della probabilità della somma (geometrica) di due vettori in un

Digitized by Google

piano e quello (Çebycef) della probabilità che una frazione a termini interi assegnati a piacere sia riducibile a più semplice espressione.

Il capitolo IV tratta delle *probabilità*, a posteriori, delle *ipotesi* (teoremi di Bayes e sua estensione) e della probabilità degli avvenimenti futuri in base all'esperienza. Delle formole e dei concetti relativi è fatta applicazione a stabilire i principii fondamentali della *statistica matematica* e delle previsioni che dai dati statistici si possono dedurre. L'A. non manca di inistere sul valore affatto convenzionale di tali applicazioni, per quanto riguarda in particolare l'uso delle così dette " *tavole di mortalità* ".

Alcuni curiosi esempi relativi alla *probabilità delle testimonianze* chiudono questo capitolo.

Nel capitolo VII (Methode der kleinsten Quadrate) sono trattati i soli problemi fondamentali della *combinazione più vantaggiosa delle osservazioni.* I postulati assunti a base sono i seguenti: che il risultato più conveniente sia funzione lineare delle osservazioni: che il valore medio (speranza matematica) dell'errore sia *nullo* (cioè non ci siano errori *costanti*): che il valor medio del quadrato dell'errore sia minimo.

Salvo diversità di forma la trattazione non ci sembra in distanza diversa da quella classica data da Gauss nella " Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae ".

Una breve esposizione dei problemi elementari riguardanti le *assicurazioni sulla vita* è argomento del Cap. VIII ed ultimo. A questo fanno seguito le tre Appendici già ricordate. Il volume si chiude con una tabella numerica dei valori dell'integrale

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

Questi valori sono dati con *sei* cifre decimali pei valori di x da 0 a 2,500 di millesimo in millesimo, e con *sette* decimali pei valori di x da 2,50 a 3,79, di centesimo in centesimo.

P. Pizzetti.

Algebra.

M. Chini, *Corso speciale di Matematiche con numerose applicazioni ad uso principalmente dei chimici e dei naturalisti.* Seconda

Digitized by Google

edizione con aggiunta e modificazioni. 8°, p, XII + 229. Livorno, Giusti 1912 (Prezzo L. 4).

Questa nuova edizione del ben noto manuale del Prof. Chini nelle sue linee generali è identica alla prima, su cui venne a suo tempo reso conto in questo periodico (v. *Bollettino*, T. VII, 1904 p. 115), onde ci limiteremo a rilevare le migliorie introdottevi. Le più essenziali toccano la I. Parte *(Complementi d' Algebra)*, nella quale furono introdotti al principio due nuovi Capitoli, uno sopra la *Proporzionalità* e l'altro sulle *Progressioni*, i quali provano che l'A. avvertì la necessità di prendere le mosse da un punto meno elevato donde era partito nella I. edizione. Alla fine della stessa Parte furono aggiunti tre nuovi Capitoli uno sopra l'interpretazione geometrica dei numeri complessi (Elementi di calcolo vettoriale), gli altri sopra la risoluzione delle equazioni quadratiche e cubiche; altri giudichi se opportunamente l'A. non si sia spinto sino alle equazioni di quarto grado, con cui avrebbe esaurito il campo delle equazioni algebriche letterali suscettibili di risoluzione algebrica.

Poichè il successo, che già arrise a questo libro, presumibilmente continuerà ora che si ripresenta sotto migliore forma, così ci sia lecito esprimere due desideri per le edizioni future.

Il primo concerne le coordinate polari. Sarebbe ormai tempo che si diffondesse anche in Italia il costume di ammettere per il modulo valori negativi (cfr. *Periodico di matematica* T. XV, p. 7). Il restringersi a considerare soltanto i valori positivi ha per conseguenza che certe curve vengono disegnate incompletamente: valga per tutti l'esempio della spirale d'Archimede di cui l'A. (al pari di moltissimi altri) considera *soltanto* il ramo corrispondente a valori positivi dell'argomento. Inoltre che cosa risponderebbe egli ad uno scolaro intelligente che gli chiedesse il significato geometrico del fatto che nell'equazione polare di una curva $f(\varrho, \omega) = 0$ ad un certo valore di ω corrisponde un valore negativo di ϱ?

L'altro desiderio nasce dal considerare il pubblico di pratici a cui l'egregio autore si rivolge; ci sembra che sarebbe utilissimo mostrare loro come la geometria analitica porga procedimenti grafici utilissimi per risolvere (limitiamoci alle equazioni considerate dall'A.!) di 2° e 3° grado. Infatti tracciate (come fa l'A.) le curve $y = x^2$, $y = x^3$, secandole con la retta $y = ax + b$

Digitized by Google

si arriva nel modo più comodo a risolvere le equazioni $x^2 = ax + b$, $x^3 = ax + b$, cioè *tutte* le equazioni dei gradi due e tre

G. L.

A. Voigt, *Theorie der Zahlenreihen und der Reihengleichungen.* Leipzig, Göschen, 1911: 8°, p. VIII + 133 (Prezzo, Mk. 4).

È difficile seguire il pensiero dell'autore attraverso il complicatissimo apparato di simboli e di nomi di cui egli si vale, ed è impossibile dare un'idea anche approssimativa del contenuto della sua opera evitando l'uso di lunghe e numerose formole. Pare che lo scopo finale sia la risoluzione numerica delle equazioni determinate ed indeterminate dei sistemi di equazioni; se il nuovo metodo sia in pratica preferibile a quelli ordinari, non ispetta a noi decidere.

Ci limiteremo a dire che il concetto fondamentale a cui s'informa l'autore consiste nel considerare i numeri non come enti isolati, ma come termini di serie regolari; così la divisibilità di a per b può interpretarsi come l'appartenere a alla serie bx, la risoluzione d'un'equazione algebrica come la ricerca del posto che prende un numero in una corrispondente serie aritmetica, la risoluzione d'un'equazione indeterminata come la ricerca dei termini comuni di due serie di numeri. In queste considerazioni i coefficienti binomiali hanno la stessa importanza che hanno le potenze nell'aritmetica ordinaria.

G. Vivanti.

Teoria delle Funzioni.

N. Nielsen, *Elemente der Funktionentheorie.* Vorlesungen gehalten an der Universität Kopenhagen. Leipzig und Berlin, Teubner, 1911: 8°, p. X + 520 (Prezzo del vol. leg. Mk. 15).

Questo trattato si distingue dagli altri congeneri per due caratteri: per la grande ricchezza e varietà del contenuto, e per il numero notevole di esercizi (440), cosa questa del tutto nuova in un corso di Analisi. Tre grandi divisioni, d'estensione pressochè eguale, costituiscono l'opera: funzioni di variabili reali, funzioni di variabili complesse, funzioni elementari. L'autore prende come punto di partenza la teoria di Cantor dei numeri irrazionali, studia le successioni e le serie a termini reali e viene

Digitized by Google

poi ai concetti di funzione e di continuità. Dopo un breve capitolo sulla equiconvergenza delle serie, che gli dà occasione a definire analiticamente le funzioni trigonometriche, introduce le derivate, stabilisce i teoremi generali sulle funzioni derivabili, e determina le derivate delle funzioni più semplici. Le proprietà delle funzioni d'una variabile vengono poscia estese a quelle di due variabili. Seguono le definizioni di integrale definito e indefinito coi teoremi relativi, la teoria degli integrali impropri, e quella degli integrali contenenti un parametro.

La seconda parte comincia colla teoria dei numeri complessi ordinari e degli aggregati di numeri complessi. Si definisce poi la funzione $f(x)$ della variabile complessa $x = u + iv$ mediante la relazione:

$$f(x) = A(u, v) + iB(u, v),$$

dove u, v sono due variabili reali, e l'integrale di $f(x)$ lungo il tratto K di curva $u = \varphi(t), v = \psi(t)$ compreso tra i punti $t = a, t = \beta$ mediante la:

$$\int_K f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta (A + iB)(\varphi' + i\psi')\,dt.$$

Una funzione si dice *analitica* per $x = a$, se ammette in questo punto una derivata unica; per le funzioni analitiche si stabiliscono i teoremi fondamentali di Cauchy, e se ne sviluppano le conseguenze, premessa la teoria delle serie e dei prodotti infiniti a termini complessi. La considerazione delle serie di funzioni analitiche prepara alla teoria delle serie di potenze e delle funzioni trascendenti intere, e la seconda parte termina collo studio delle sostituzioni lineari fratte, della proiezione stereografica e della rappresentazione conforme.

La terza parte racchiude una grande quantità di formole e di teoremi interessanti. I primi capitoli sono dedicati alle funzioni trigonometriche e ciclometriche, al logaritmo e ad alcuni integrali che ne dipendono; segue la teoria delle funzioni algebriche e delle funzioni trascendenti elementari aventi per argomenti funzioni algebriche. Viene poi ripreso lo studio delle funzioni logaritmiche e ciclometriche considerate come integrali di funzioni algebriche; se ne costruiscono le funzioni inverse, ed uno studio analogo si fa per l'integrale ellittico di prima specie. Da ciò l'autore è condotto a considerare le proprietà

Digitized by Google

generali delle funzioni biperiodiche. Da ultimo egli espone la teoria delle funzioni di Bernoulli e dei polinomi di Legendre, della formola sommatoria di Eulero ed analoghe, delle serie asintotiche, della funzione gamma.

Questo brevissimo riassunto è sufficiente a far comprendere come il trattato del Nielsen costituisca un prezioso sussidio per chiunque s'interessi agli studi d'Analisi. Non possiamo però tacere che vi si riscontrano qua e là alcune inesattezze e che vari punti lasciano luogo a qualche dubbio. Così p. es. non si capisce come dal fatto che $A(x)$ soddisfa (p. 95) alla formola d'addizione $A(x+y) = A(x)\,A(y)$ segua senz'altro che si possa porre $A(x) = e^x$; l'esempio 2° a p. 100 contiene indubbiamente un errore; la dimostrazione del teor. III a p. 106 non è, come si sa, del tutto legittima. A p. 253 dal teorema che gli zeri d'una funzione analitica sono isolati l'autore deduce immediatamente che essi sono in numero finito in ogni campo interno al campo di esistenza; la conseguenza è giusta, ma esige qualche maggiore spiegazione. È pure insufficiente la dimostrazione dell'isogonalità della proiezione stereografica a p. 325, ed è troppo concisa quella della impossibilità di funzioni biperiodiche olomorfe a p. 451. Una lacuna più importante è la mancanza di ogni considerazione relativa alla connessione a proposito del teorema di Cauchy (p. 210); l'autore dimostra questo teorema per una funzione analitica in un " Arealkontinuum „, cioè (p. 122) in un campo limitato da una curva, sulla natura della quale non è fatta alcuna ipotesi, mentre la dimostrazione implica che tutti i punti interni alla curva d'integrazione appartengono al campo d'esistenza della funzione, ciò che può asserirsi senza eccezioni soltanto se il campo è semplicemente connesso. Un'altra osservazione: la definizione di derivata data dall'autore (p. 99) non presuppone la continuità, per modo che, se una funzione $f(x)$ ha da ambe le parti di un punto c una discontinuità ordinaria, e se le differenze $f(c) - f(c-0)$, $(fc+0) - f(c)$ sono positive, $f'(c)$ esiste ed ha il valore $+\infty$ (p. 100). Logicamente non v'ha nulla in contrario, ma non si vede quale vantaggio si raggiunga, mentre invece si va incontro a qualche inconveniente; così p. es. può accadere che la somma di due funzioni derivabili non sia derivabile (p. 107). Ci auguriamo che l'Autore voglia rivedere accuratamente la sua opera, togliendo quelle mende che abbiamo notate e quelle altre che ci sono forse sfuggite o sulle quali abbiamo creduto inutile soffermarci.

G. Vivanti.

Digitized by Google

Programmi e Riassunti di Corsi Universitari.

Università di Modena.

Analisi Algebrica e calcolo infinitesimale. Prof. Ettore Bortolotti.

1° Anno di Corso.

I. — Numeri razionali. — Operazioni razionali.

Lezioni 1-2 — Numeri congrui. — Proprietà elementari delle congruenze. — Analisi indeterminata di I° grado.

3-5 — Elementi di calcolo combinatorio. — Teoremi del binomio e del polinomio. — Elementi del calcolo della probabilita.

6-9 — Determinanti. — Sviluppo. — Determinanti di Vandermonde. — Continuanti. — Prodotto di due determinanti.

10-12 — Sistemi di equazioni lineari. — Teorema di Rouché.

II. — Limite.

Lezioni 13-14 — Numeri reali. — Corrispondenza fra numeri e segmenti.

15-18 — Punto Limite, — limite. — Calcolo dei limiti di espressioni che hanno forma indeterminata.

19-21 — Numeri complessi. — Loro rappresentazione con vettori. — Operazioni con numeri complessi — Limite di numeri complessi.

23-28 — Serie. — Convergenza di serie a termini positivi. — Convergenza assoluta. — Somma e prodotto di serie.

29-30 — Prodotti infiniti e frazioni continue.

III. — Funzione.

Lezioni 31-33 — Funzione reale di variabile reale. — Limite superiore (inferiore). — Punto di Weierstrass. — Oscillazione.

34-35 — Continuità — Funzioni continue in tutto un intertervallo. — Continuità uniforme.

36-38 — Funzioni di due o più variabili reali. — Funzioni di variabile complessa — Continuità assoluta separata. — Funzioni continue in tutto un campo.

Digitized by Google

IV. — Derivata.

Lezioni 39-41 — Derivata di una funzione reale di variabile reale. — Teorema di Rolle. — Derivata della somma, del prodotto, del quoziente, di funzione di funzione, di funzioni inverse.

42-43 — Derivazione successiva. — Formula abbreviata di Taylor.

44-47 — Derivazione parziale di funzioni di più variabili. — Derivate successive — Derivate di funzioni composte. — Formula abbreviata di Taylor per funzioni di più variabili.

48-49 — Funzioni implicite. — Derivate di funzioni implicite.

50-51 — Rappresentazione geometrica delle funzioni reali di variabile reale — Significato geometrico della derivata. Massimi, minimi, concavità, convessità, flessi.

V. — Equazioni algebriche.

Lezioni 52 — Polinomi — Campo di razionalità — Ricerca del M. C. D.

53-54 — Equazione algebrica. — Teorema di esistenza delle radici. — Radici multiple. — Interpolazione. — Scomposizione di una funzione razionale in frazioni semplici.

55-57 Funzioni simmetriche delle radici. — Risultante di due polinomi. — Eliminazione. — Discriminante.

58-59 — Trasformazioni lineari nelle equazioni. — Equazioni reciproche.

60-62 — Risoluzione approssimata delle equazioni. — Teoremi principali sulle separazioni delle radici. — Metodo di Newton per il calcolo approssimato delle radici.

63 — Risoluzione delle equazioni del 3° e del 4° grado.

2° Anno di Corso. — (Calcolo infinitesimale).

I. — Calcolo Differenziale.

Lezioni 1-3 — Massimo e minimo limite. — Infiniti ed infinitesimi. — Teorema dell'Hôpital.

4-6 — Differenze finite e differenziali. — Differenziali parziali e totali di funzioni di più variabili — Differenziali successivi.

Digitized by Google

7-9 — Funzioni omogene. — Formula di Eulero — Determinante funzionale. — Sistemi di equazioni. — Inversione di un sistema.

10-13 — Serie di funzioni — Convergenze uniforme. — Derivazione ed integrazione per serie. — Serie di potenze. — Serie di Taylor. — Funzioni esponenziali e circolari.

II. — **Calcolo Integrale.**

Lezioni 14-16 — Lemma di Darboux — Integrale definito esteso ad un segmento rettilineo. — Integrale curvilineo. — Integrale di campo — Condizioni di integrabilità.

17 — Proprietà fondamentali degli integrali definiti — Teorema della media.

18-19 — Integrali indefiniti — Ricerca delle primitive — Integrali di funzioni elementari.

Lezioni. 20-24 — Metoti ed espedienti di integrazione. — Integrazione immediata — Integrazione per scomposizione — per sostituzione — per parti — per serie. — Integrazione di funzioni razionali — di alcune semplici irrazionali algebriche — di trascendenti elementari. — Integrazione approssimata — Integratori meccanici.

25-26 — Integrali di funzioni che hanno punti di infinito. — Integrali estesi ad intervalli infiniti.

27-31 — Integrali di funzioni di più variabili. — Derivazione sotto il segno. — Integrali multipli. — Integrali curvilinei. — Formula di Green. — Trasformazione delle variabili negli integrali multipli.

III. — **Applicazioni Geometriche.**

Lezioni 32-34 — Uso degli infinitesimi in questioni geometriche — Curve piane notevoli.

35-37 — Tangenti e normali. — Podarie. — Assintoti. — Cenno sui punti singolari delle curve piane. — Massimi e minimi.

38-41 — Contatti delle curve piane. Curvatura. — Evolute ed evolventi. — Inviluppi.

42-43 — Differenziale dell'area e dell'arco. — Lunghezza dell'arco. — Quadrature.

44-46 — Curve nello spazio. — Tangente. — Piano nor-

Digitized by Google

male. — Piano osculatore. Lunghezza dell'arco — Cerchio osculatore. — Flessione. — Torsione.

47-50 — Superficie. — Pianto tangente — Inviluppi di superficie. — Curvature — Aree e volumi.

IV. — **Equazioni Differenziali.**

Lezioni 51-53 — Definizioni. — Equazioni del 1.° ordine — Separazione delle variabili. — Equazioni omogenee del 1.° ordine — Equazioni lineari. — Equazioni di Bernoulli e di Riccati.

54-56 — Equazioni che si integrano dopo eseguita una derivazione. — Equazioni di Monge e di Clairaut.

57 — Integrali singolari.

58 — Fattore integrante.

50-61 — Equazioni di ordine superiore che facilmente si riducono al 1.° ordine.

62-64 — Equazioni lineari. — Caso dei coefficienti costanti. — Metodo della variazione delle costanti arbitrarie. — Equazioni di Eulero, ed altre facilmente riducibili ad equazioni a coeffcenti costanti.

66-65 — Integrazione per serie di equazioni differenziali.

67-68 — Sistemi di equazioni differenziali simultanee. — Riduzione alla forma normale. — Sistemi di equazioni lineari.

69-72 — Equazioni alle derivate parziali. — Equazioni lineari e del 1.° ordine. — Equazioni del 1.° ordine non lineari. — Metodo delle caratteristiche. — Soluzioni di Cauchy. — Integrali completi. — Integrali generali — Integrali singolari. — Applicazioni geometriche.

73-77 — Elementi del calcolo delle variazioni. — Variazione di un integrale definito. — Massimi e minimi. — Metodo pratico di calcolo. — Problemi degli isoperimetri.

Osservazione. — Il numero delle lezioni, assegnato per lo svolgimento dei vari capitoli, si desunse da quello delle lezioni date negli ultimi tre anni.

Digitized by Google

Notizie.

C. Méray. Il IV Fascicolo del T. XXII (1912) della *Révue bourguignonne de l' Université de Dijon* contiene un' estesa *No tice sur la vie et les travaux de Charles Méray* dovuta a J. Pionchon, che fu collega ed amico dell' illustre estinto. Tale lavoro, che può ritenersi veramente definitivo e capace di soddisfare le più incontentabili esigenze, presenta un quadro fedele di tutta l' attività dell' illustre matematico. Questi (n. a Châlons-sur-Sâone il 12 Novembre 1835; m. a Digione il 2 Febbraio 1911) appartenne alla Facoltà di Scienze di Digione dal 23 Aprile 1868 al 2 Aprile 1905, giorno in cui, colpito dalla legge sopra i limiti d' età, venne collocato a riposo. In tre documentatissimi Capitoli il biografo lo considera come scenziato, come insegnante e come uomo. Segue un esatto elenco delle sue opere; quindi i discorsi pronunciati (da Batallion, Collot, Boirac e Pionchon) ai suoi funerali; finalmente la riproduzione o traduzione degli articoli necrologici dedicati al Méray da C. A. Laisant, G. Loria e C. Bourlet.

***

Emilio Wohlwill nacque ad Amburgo il 24 Novembre 1835; giovanissimo si trasferì a Seesen (Ducato di Brunswick) ove suo padre era stato chiamato a dirigere la Jacobson-Schule. Dal 1855 al 1860 frequentò le Università di Heidelberg, Berlino e Gottinga; in quest' ultima si addottorò con una dissertazione di chimica. Amburgo, che lo tenne sempre quale carissimo figlio, gli concesse uffici nell' insegnamento e nell' industria, che gli assicurarono un' esistenza tranquilla ed una posizione eminente. A noi quello che interessa di quì ricordare è il frutto degli studi estranei alle sue occupazioni ufficiali, giacchè concernono la storia delle scienze positive. E sopratutto vanno ricordate le numerose pubblicazioni che egli dedicò a Gallileo e che lo posero in prima linea fra gli studiosi delle vicissitudini del celebre fiorentino. Tali ricerche egli pensò di raccogliere e coordinare in una grande opera, che doveva esser quasi il suo testamento scientifico, ma che sgraziatamente rimase al suo primo volume (*Galilei und sein Kampf für die Copernicanische Lehre,* I Bd., 1909): la morte che lo colpì il 2 Febbraio 1909 gli vietò di compirla e così rese maggiormente sensibile il vuoto da lui lasciato.

Digitized by Google

***

MATHEMATISCHE BIBLIOTHEK. Richiamiamo l'attenzione dei nostri lettori sopra questa nuova raccolta di opere di scienza popolare intrapresa dalla Casa Teubner sotto la direzione di W. Lietzmann e A. Witting; sono piccoli e graziosi volumetti in ognuno dei quali è trattata in forma concisa, chiara e, per quanto possibile, piacevole, un argomento concernente le matematiche pure ad applicate. Gli ultimi volumi usciti (nn. V, VIII, IX) sono dovuti a E. Timerding, H. Wieleitner, P. Meth, e A. Witting e trattano rispettivamente le leggi della caduta dei gravi (con ritratto di Galilei), le operazioni fondamentali dell' aritmetica, la teoria del moto dei pianeti e i rudimenti del calcolo infinitesimale (con i ritratti di Leibniz e Newton). Ogni tentativo per rendere più ampia la conoscenza delle teorie matematiche più importanti, mentre è sintomo del favore sempre più generale di cui queste meritamente godono, va salutato con completa approvazione come probabile causa di nuovi progressi; onde con questa nuova pubblicazione quella grande Casa tedesca editrice ha accresciuta di una le sue ingenti benemerenze di fronte alle scienze esatte. Aggiungiamo qualche informazione sopra il VII Fascicolo. Il quale ha per titolo *Die sieben Rechnungsarten mit allgemeinen Zahlen*, epperò contiene le regole fondamentali relative alle operazioni con ogni sorta di numeri; naturalmente solo quanto è essenziale perchè, come osserva argutamente l'Autore, se l'Eulero ha dedicato alla matematica 45 volumi in 4°, non si può pretendere che egli sveli tutti i misteri dei numeri in settanta paginette. Nell' interessante libretto sono sparse molte notizie storiche, della cui esattezza è garanzia il fatto che furono sottoposte ad un' accurata revisione da parte di G. Enestrom.

***

CODEX LEIDENSIS 399,1. Di quest'opera che si viene lentamente publicando (v. *Bollettino*, T. I, 1898, p. 110) per cura del Besthorn e dell' Heiberg vide di recente (Hauniae, MCMX) la luce un nuovo fascicolo (il I della III Parte) il quale si riferisce al IV Libro degli *Elementi* di Euclide.

Digitized by Google

*
* *

NUOVI MODELLI MATEMATICI. La Casa M. Schilling di Lipsia ha testè iniziata la pubblicazione di nuove serie di due modelli. Una (XLII) sinora comprende tre modelli in cartone concernenti le funzioni di Bessel per argomenti complessi; uno dà l'immagine della parte reale della funzione $J_0(z)$, mentre gli altri due porgono le congeneri rappresentazione della parte reale e del coefficiente di i della funzione $H_0^1(z)$ di Hankel; tutti furono eseguiti nell'Istituto di Fisica teorica dell'Università di Monaco da F. Bergmann. Dell'altra serie (XLI) fu pubblicato soltanto il modello n. 1, il quale comprende due apparati che servono all'illustrazione della « teoria della trottola » e furono costruiti da L. Prandtl.

*
* *

LA NOSTRA ASTRONOMIA SECONDO UN GIAPPONESE. Continuando le pubblicazioni destinate a farci conoscere la scienza dell'estremo Oriente, J. Mikami ha testè dato in luce un articolo (*A Japanese buddhist's view of the European astronomy;* Nieuw Archief voor Wiskunde, II Ser., T. X, 1912) inteso a dare notizia delle opere astronomiche di un " bonzo " di Kyoto, Yentsu (1754-1834), ed in generale delle varie opinioni manitestate nel Giappone sopra la struttura ed il meccanismo dell'universo stellato.

*
* *

ATTUARIA. La pratica delle assicurazioni va talmente diffondendosi in tutto il mondo, assumendo nuovi e svariatissimi aspetti, che qualunque esposizione di essa invecchia rapidamente. A tale sorte non è sfuggito il *Lessico* di A. Manes che a suo tempo segnalammo ai nostri lettori (*Bollettino*, T. XII, 1910, p. 27); a ridargli una vita nuova e vigorosa provvede un *Ergänzungsband für die Jahre 1908 bis 1912* (Tübingen, J. C. B. Mohr, 1913) che va segnalato e raccomandato a tutti i cultori della materia.

Pavia - Premiata Tipografia SUCCESSORI FRAT. FUSI.

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE
ANNO XV, Fasc. II: Aprile, Maggio e Giugno 1913

LA TEORIA DELLE PROPORZIONI IN UN TESTO DEL XVII SECOLO

di
FRANCESCO PODETTI

(*Continuazione*; *v. p. 8*)

6. Le proprietà dei rapporti che il Borelli dimostra nel suo III libro sono, salvo l'ordine, le stesse del V libro di Euclide, alle quali egli ne aggiunge poche altre, tolte però anch'esse da qualche classico autore (1). Egli informa però tutte le sue dimostrazioni alle già citate definizioni, come risulta da alcune di esse che qui mi propongo di esporre, usando delle notazioni moderne.

In un primo gruppo di proposizioni (dalla 1ª alla 5ª) dimostra che essendo $A \geqq B$, si ha corrispondentemente, per ogni grandezza C omogenea con A e B, $\frac{A}{C} \geqq \frac{B}{C}$ e $\frac{C}{A} \leqq \frac{C}{B}$, e inversamente.

Segue la dimostrazione della proprietà seguente (prop.ᵉ 6ª): " Se due rapporti sono uguali, ogni rapporto maggiore (o minore) di uno di essi, è maggiore (o minore) dell'altro „. (Euclide - lib. V prop. 13ª).

Dall'ipotesi $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ e $\frac{E}{F} > \frac{A}{B}$, deduce (def. 11ª) l'esistenza di un rapporto razionale $\frac{H}{K}$ tale che sia $\frac{E}{F} < \frac{H}{K} < \frac{A}{B}$; egli osserva poi che dovrà pure essere $\frac{H}{K} < \frac{C}{D}$, non potendo questi

(1) Nel libro del Borelli di contro ad ogni proposizione troviamo la citazione del testo dal quale egli la riporta. Risulta in tal modo che egli attinse non solo ad Euclide, ma anche ad Archimede, Tolomeo e Pappo; fra gli autori meno remoti egli cita qualche volta anche il Campano.

Digitized by Google

due rapporti essere uguali (perchè in tal caso sarebbe pure razionale il rapporto $\frac{A}{B}$ e, per la def. 8ª, $\frac{A}{B} = \frac{H}{K}$ mentre si è detto essere $\frac{A}{B} > \frac{H}{K}$) e nemmeno potendo essere $\frac{H}{K} > \frac{C}{D}$ dal che risulterebbe $\frac{A}{B} > \frac{H}{K} > \frac{C}{D}$ e quindi $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$ che contraddice all'ipotesi; si ha dunque $\frac{E}{F} < \frac{H}{K} < \frac{C}{D}$ e quindi $\frac{E}{F} < \frac{C}{D}$.

Da questa proposizione deduce (prop. 7ª) la proprietà transitiva dell'uguaglianza dei rapporti: « Se $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ e $\frac{E}{F} = \frac{C}{D}$, si à pure $\frac{A}{B} = \frac{E}{F}$ ». (Euclide, lib. V, prop. 11ª).

La dimostrazione consiste nel verificare che non può esistere un rapporto razionale minore di uno dei rapporti $\frac{A}{B}$ e $\frac{E}{F}$ e maggiore dell'altro. Se infatti fosse $\frac{H}{K}$ un tal rapporto razionale per modo che si avesse $\frac{A}{B} > \frac{H}{K} > \frac{E}{F}$, essendo per ipotesi $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ ne verrebbe, per il preced. teorema, $\frac{C}{D} > \frac{H}{K} > \frac{E}{F}$ ossia $\frac{C}{D} > \frac{E}{F}$, contraria all'ipotesi. Resta così dimostrata la eguaglianza $\frac{A}{B} = \frac{E}{F}$ in base alla def. 12ª (1).

7. Dopo aver dimostrato (dalla prop. 8ª alla 12ª) come si possa *invertire* una proporzione, e come si possano *permutare i medi* in una proporzione fra quattro grandezze omogenee, dimostra (dalla prop. 13ª alla 15ª) come si possa *dividere e comporre* una proporzione, assieme ad altre proprietà che derivano da queste.

(1) Il Borelli nelle sue dimostrazioni ricorre troppo spesso al metodo di riduzione all'assurdo, e ciò dipende principalmente dalla forma negativa della sua def.ª 12ª. La prop. 7ª poteva dimostrarsi osservando che ogni rapporto razionale maggiore (o minore) di $\frac{A}{B}$ è pure maggiore (o minore) di $\frac{C}{D}$ (prop. 6ª) e quindi maggiore (o minore) di $\frac{E}{F}$.

Digitized by Google

Per dimostrare come dalla proporzione $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ possa dedursi l'altra $\frac{A-B}{B} = \frac{C-D}{D}$, quando sia $A > B$ (prop. 13ª), ammette l' esistenza di un rapporto razionale $\frac{E}{F}$ minore di $\frac{A-B}{B}$ e maggiore di $\frac{C-D}{D}$. Se si ha $E = m\frac{F}{n}$ dalla diseguaglianza $\frac{A-B}{B} > \frac{E}{F}$ ne verrà, essendo $m\frac{\frac{B}{n}}{B} = \frac{E}{F}$, $A - B > m\frac{B}{n}$ (def. 9ª) ossia $A > (m+n)\frac{B}{n}$; e analogamente dalla $\frac{C-D}{D} < \frac{E}{F}$ ne verrà $C < (m+n)\frac{D}{n}$.

Le ottenute diseguaglianze $A > (m+n)\frac{B}{n}$ e $C < (m+n)\frac{D}{n}$ ci dicono che il rapporto $\frac{A}{B}$ è maggiore del rapporto della $(m+n)\frac{B}{n}$ alla B, ed il rapporto $\frac{C}{D}$ è minore dello stesso rapporto razionale (defª. 9), cioè che $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$, la quale è contraria alla supposta eguaglianza di questi due rapporti.

Questa proposiz. nella quale dall'aver supposto $\frac{A-B}{B} > \frac{C-D}{D}$ è risultato $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$, conduce il Borelli ad enunciare il corollario seguente, da lui attribuito a Pappo (lib. III - prop. 7ª):

" Se di quattro grandezze la prima ha alla seconda maggior rapporto della terza alla quarta, la somma della prima e della seconda ha alla seconda maggior rapporto che la somma della terza e della quarta alla quarta ".

Nella prop. 14ª dimostra come dalla proporzione $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ risulti l'altra $\frac{A+B}{B} = \frac{C+D}{D}$, e in questa vediamo da lui usato il postulato relativo all'esistenza della quarta proporzionale.

Egli suppone che dei due rapporti che debbonsi dimostrare

Digitized by Google

uguali, uno sia maggiore dell'altro, ad esempio $\frac{A+B}{B} > \frac{C+D}{D}$; esisterà allora una grandezza E tale che sia $\frac{E}{B} = \frac{C+D}{D}$. Ne risulta (prop. 6ª) $\frac{A+B}{B} > \frac{E}{B}$ e (prop. 5ª) $A+B > E$, $A > E-B$ da cui $\frac{A}{B} > \frac{E-B}{B}$. Ma dividendo la proporzione $\frac{E}{B} = \frac{C+D}{D}$ si ottiene $\frac{E-B}{B} = \frac{C}{D}$, per cui si avrebbe $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$ che è assurda per l'ipotesi fatta.

Anche da questa proposizione egli deriva il corollario, da lui attribuito al Campano (lib. V, prop. 29ª):

" Se $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$, ed $A > B$, si ha pure $\frac{A-B}{B} > \frac{C-D}{D}$ ".

Nella proposizione 16ª dimostra che: " Se quattro grandezze omogeneé sono proporzionali, la somma della massima e della minima di esse, sarà maggiore della somma delle due rimanenti ". (Eucl. - prop. 25ª del V libro). Ne deduce come corollario: " Se $A : B = C : D$ secondo che si ha $A \lesseqgtr B$, si ha corrispondentemente $C \lesseqgtr D$, e se sono tutte omogenee, se $A \lesseqgtr C$ è pure corrispondentemente $B \lesseqgtr D$ ".

Dalla prop. 17ª alla 22ª troviamo quelle proprietà dei rapporti che corrispondono in Euclide alle proprietà dei *rapporti composti.* Come corollario della prop. 19ª egli dimostra che: " Se $A:B=C:D$, per ogni coppia di interi m ed n si ha pure: $mA:nB = mC:nD$ ". (Euclide, lib. V, prop. 4ª).

8. Nelle prop. 23ª e 24ª del III libro, il Borelli dimostra alcuni particolari criterî per giudicare se quattro grandezze sono in proporzione. Di questi mi limiterò a ricordare il seguente:

" Il rapporto $\frac{A}{B}$ sarà uguale al rapporto $\frac{C}{D}$ quando si sappia che per ogni grandezza prefissata, omogenea con A, esiste una grandezza A', maggiore di A e che differisce da A per meno di quella prefissata grandezza, tale che $\frac{A'}{B} > \frac{C}{D}$ e così pure esiste, per ogni assegnata grandezza omogenea con A, una nuova grandezza A'' minore di A e che differisce da A per meno di quella

Digitized by Google

assegnata grandezza, tale che $\frac{A'}{B} < \frac{C}{D}$ „ (1).

Tale proposizione è da lui dimostrata osservando che data una qualsiasi grandezza A_1 maggiore di A, può sempre trovarsi, per l'ipotesi, una tal grandezza $A' > A$ che differisca da A per meno di $A_1 - A$ e tale che sia $\frac{A'}{B} > \frac{C}{D}$; da ciò risulta $\frac{A_1}{B} > \frac{A'}{B} > \frac{C}{D}$ ossia $\frac{A_1}{B} > \frac{C}{D}$. Dunque nessuna grandezza maggiore di A ha alla B rapporto uguale a $\frac{C}{D}$. Analogamente dimostra che nessuna grandezza minore di A ha alla B rapporto uguale al rapporto $\frac{C}{D}$; quindi, per l'esistenza della quarta proporzionale, $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

Questo criterio che, nella dimostrazione dell'eguaglianza di due rapporti, sostituisce alla considerazione di tutti i rapporti razionali maggiori di $\frac{A}{B}$, di cui alla def. 12ª, quella di rapporti alla B di grandezze maggiori di A, ma che differiscano da A per meno di una grandezza qualsiasi prefissata, ed alla considerazione dei rapporti razionali minori di $\frac{A}{B}$, quella di rapporti alla B di grandezze minori di A, ma che differiscano da A per meno di un'assegnata grandezza, corrisponde nella teoria analitica dei numeri reali al metodo delle classi contigue, quando si aggiunga la condizione che i considerati rapporti alla B di grandezze maggiori o minori di A siano razionali. Con questo metodo si sostituisce appunto a una partizione di Dedekind, una qualsiasi delle coppie di classi contigue di numeri razionali che da tale partizione si può ottenere in modo che definisca lo stesso numero reale dalla partizione stessa. Si aggiunga che la dimostrazione

(1) « Se d'una quantità che avanzi la 1ª di un eccesso minore di qualunque assegnabile, la proporzione che essa ha alla 2ª sia maggiore di una data proporzione, e parimenti di una quantità che manchi dalla 1ª di un difetto minore di qualunque assegnabile, la proporzione che essa ha alla 2ª sia minore della stessa data proporzione, la 1ª alla 2ª avrà la proporzione data ». (Scolio della prop. 24 - pag. 181).

Digitized by Google

dell'identità di due numeri reali α e β che sono entrambi limiti della stessa coppia di classi contigue di numeri razionali, consiste nel dimostrare che ogni numero razionale maggiore (o minore) di α è pure maggiore (o minore) di β, cioè che α e β sono numeri reali corrispondenti ad una medesima partizione del Dedekind, con un procedimento analogo a quello seguito dal Borelli nel dimostrare, come or ora vedemmo, che ogni rapporto maggiore (o minore) di $\frac{A}{B}$ è pure maggiore (o minore) di $\frac{C}{D}$.

Quanto si è detto prima credo che valga a dimostrare come la teoria sintetica dei numeri reali che si desume dal III libro del Borelli, sia ispirata a un metodo che oggi possiamo dire moderno. Naturalmente esiste colla teoria analitica del Dedekind quella sostanziale differenza che deriva dal fatto che non era noto al Borelli il postulato della continuità, il quale doveva venire enunciato solo nel secolo scorso da G. Cantor e dal Dedekind stesso. Perciò non si trova nella teoria del Borelli la proposizione analoga a quella che ammette l'esistenza di un numero reale corrispondente ad una qualsiasi partizione del Dedekind.

9. Il Borelli ha relegato fra le ultime proposizioni del suo III libro (dalla 25ª alla 27ª) la dimostrazione delle proposizioni date da Euclide come definizioni del suo V libro, e ciò per far notare come tutta la sua teoria sia indipendente dalle definizioni euclidee.

Nella prop. 25ª dimostra che " Se A, B e C, D sono coppie di grandezze omogenee, ed esistono due interi m ed n per cui sia $mA > nB$ ed $mC \leq nA$, si avrà $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$ ". (Euclide, def. 7ª del V libro).

Vediamo ora la dimostrazione delle ultime due proposizioni che ci porteranno ad una importante conclusione.

Nella prop. 26ª dimostra l'inversa della precedente, cioè:

" Se $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$, esistono due interi m ed n per cui si ha: $mA > nB$ ed $mC \leq nD$ ".

Dall'ipotesi, e per l'esistenza della quarta proporzionale, deduce l'esistenza di una grandezza A' tale che sia $\frac{A'}{B} = \frac{C}{D}$, essendo inoltre $A > A'$. Si determini ora l'intero m per modo che

Digitized by Google

sia: $m(A-A') > B$, e l'intero n in maniera che $nB \geq mA' > (n-1)B$. Dalle diseguaglianze $m(A-A') > B$ ed $mA' > (n-1)B$, si ha per somma: $mA > nB$. Ma dalla proporzione $\frac{A'}{B} = \frac{C}{D}$ si ricava: $\frac{mA'}{nB} = \frac{mC}{nD}$ (prop. 19ª, cor. I) e quindi per essere $mA' \leq nB$ ne verrà $mC \leq nD$ (prop. 16ª, corol.), la quale ultima, colla diseguaglianza $mA > nB$ già dimostrata, ci prova la verità già enunciata.

Da questa consegue facilmente la dimostrazione della proposizione 27ª: " Se le coppie A, B e C, D di grandezze omogenee son tali che per ogni coppia di interi assoluti m ed n, secondo che mA è maggiore, uguale o minore di nB, si ha corrispondentemente mC maggiore, uguale o minore di nD, si ha pure $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ ". (Euclide, def. 5ª del V libro).

Se infatti la proporzione $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ non fosse verificata, ma si avesse ad es. $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$, per il precedente teorema potrebbero determinarsi due interi m ed n tali che essendo $mA > nB$ sarebbe $mC \leq nD$, il che contraddice all'ipotesi.

Se ora diamo veste moderna alle dimostrazioni delle stesse proposizioni date dal Galileo nel suo ricordato dialogo: *Sopra le definizioni delle proporzioni di Euclide*, troviamo che esse sono identiche a quelle ora riportate dal Borelli. Veniamo dunque nella conclusione che il Borelli conosceva le dimostrazioni del Galileo, per quanto il dialogo, dettato dal sommo filosofo negli ultimi giorni della sua vita ad Evangelista Torricelli, fosse pubblicato solo nel 1674, coma già si disse, per opera del Viviani (1).

Parmi così dimostrato che il Borelli scrisse la sua teoria delle proporzioni sotto l'influenza della critica del Galileo; ma se nelle ultime citate proposizioni troviamo le stesse dimo-

(1) Della possibilità che il *B.* conoscesse le dimostrazioni del Galileo prima della loro pubblicazione ci convince lo stesso Viviani, il quale pubblicando l'accennato dialogo, unitamente al suo: *Quinto libro degli Elementi di Euclide*, nella prefazione di quest'ultimo afferma che fu indotto a quella pubblicazione « per assicurare al Galileo le sue proprie dimostrazioni, che con qualche pericolo erano andate in volta già son molti anni ». (Viviani - Op. cit., Edizione del 1746, pag. 11).

Digitized by Google

strazioni date dal Galileo, è però ben vero che questi vi giunse per via diversa, e che dobbiamo riconoscere la originalità della teoria dei rapporti del Borelli.

10. Oltre alla teoria delle proporzioni, ora sommariamente esposta, sono degne di essere ricordate anche le applicazioni di questa teoria che sono date dal Borelli nei successivi libri IV e V.

Per dar notizia del modo con cui egli applica le proposizioni del III libro e far nota la eleganza di alcune delle sue dimostrazioni, riporterò qui la dimostrazione data dal Borelli della proporzionalità fra le superficie di due cerchi e i quadrati dei loro raggi, nella quale vedremo applicato quel criterio di proporzionalità enunciato nel § 8.

Premetto la dimostrazione da lui data del seguente lemma:

" Ad ogni cerchio si possono circonscrivere ed inscrivere due poligoni regolari dello stesso numero di lati, tali che la differenza della loro superficie sia minore di un poligono dato n. (Libro V, prop. 9ª).

Sia ε un poligono dato e sia Q il quadrato circoscritto ad un dato cerchio di centro O e di raggio r. Per l'esistenza della quarta proporzionale, esisterà un segmento m tale che sia:

$$\frac{Q+\varepsilon}{Q}=\frac{r^2}{m^2} \qquad \text{(a)}$$

dove sarà $r>m$. Su di un raggio OA si prenda un segmento $OB=m$ e da B si conduca una semiretta perpendicolare ad OA e che tagli in C la circonferenza. Si divida la semicirconferenza in tal numero n di parti uguali che una di esse risulti minore dell'arco AC, e sia AD una di esse. Condotta la corda DE perpendicolare ad OA nel punto F, sarà ED il lato del poligono regolare di n lati inscritto, e indicando rispettivamente con P e p i poligoni regolari di n lati, circoscritto uno ed inscritto l'altro nel cerchio, per la proporzionalità fra i poligoni simili circoscritti a due cerchi ed i quadrati dei raggi dei cerchi (1)

(1) Il *B.* deduce questa proporzionalità, dalla proporzionalità fra i poligoni stessi e i quadrati dei loro lati omologhi, e dal fatto che questi lati, essendo i poligoni regolari, sono proporzionali ai raggi dei cerchi inscritti.

Digitized by Google

si ha: $\frac{P}{p} = \frac{\overline{OA}^2}{\overline{OF}^2}$. Ma essendo D posto sulla circonferenza fra A e C, sarà F posto sul raggio OA fra A e B e per ciò $\overline{OF}^2 > \overline{OB}^2$ cioè $\frac{P}{p} < \frac{\overline{OA}^2}{\overline{OB}^2}$ (lib. III, prop. 6ª) ossia $\frac{P}{p} < \frac{r^2}{m^2}$. Avremo ora per la (a) $\frac{P}{p} < \frac{Q+\varepsilon}{Q}$ e $\frac{P-p}{p} < \frac{\varepsilon}{Q}$ (lib. III, proposizione 14ª, coroll.°). Ma $\frac{\varepsilon}{Q} < \frac{\varepsilon}{p}$ (lib. III, prop. 2ª) dunque $\frac{P-p}{p} < \frac{\varepsilon}{p}$ da cui $P-p < \varepsilon$ (lib. III, prop. 5ª).

Dimostra poi che " Due cerchi sono proporzionali ai quadrati dei loro raggi „ (lib. V, prop. 12ª) nel seguente modo:

Siano P e p i poligoni regolari dello stesso numero n di lati, circoscritto il 1° ed inscritto il 2°, nel cerchio C di raggio r, e tali che la differenza $P-p$ sia minore di un poligono prefissato ε (e quindi tali che le differenze $P-C$ e $C-p$ siano entrambe minori di ε). Siano inoltre P' e p' i poligoni regolari di n lati circoscritto l'uno ed inscritto l'altro nel cerchio C' di raggio r'.

Poichè i rapporti $\frac{P}{P'}$ e $\frac{p}{p'}$ sono entrambi uguali al rapporto $\frac{r^2}{r'^2}$ (lib. V, prop. 10ª) ed è inoltre $\frac{P}{C'} > \frac{P}{P'}$ (per essere $C' < P'$) e $\frac{p}{C'} < \frac{p}{p'}$ (perchè $C' > p'$) sarà $\frac{P}{C'} > \frac{r^2}{r'^2}$ e $\frac{p}{C'} < \frac{r^2}{r'^2}$, essendo così dimostrato che $\frac{C}{C'} = \frac{r^2}{r'^2}$ per il criterio di proporzionalità enunciato al § 8.

Digitized by Google

Storia.

S. Günther. — *Geschichte der Mathematik.* I. *Teil. Von den ältesten Zeiten bis Cartesius.* (Mit 56 Figuren. Sammlung Schubert XVIII). Leipzig, Göschen 1908, 8° p. VII-427. (Prezzo Mk. 9.60). II. *Teil: Von Cartesius bis zur Wende des 18. Jahrhunderts* • *von* H. Wieleitner. I. *Haelfte*: *Aritmetik, Algebra, Analysis.* Bearbeitet unter Benutzung des Nachlassess von A. von Braunmühl. Mit 6 Figuren. (Sammlung Schubert Vol. LXIII) Leipzig, Göschen 1911. p. VIII-251 (Prezzo Mk. 6.50).

Il nostro resoconto del I Vol. di quest' opera giunge con un ritardo che non è senza qualche plausibile ragione. Secondo il primitivo piano, essa doveva constare di due volumi, scritti il primo da S. Günther e l'altro da A. von. Braunmühl: la deplorata scomparsa di questo, avvenuta prima che il suo compito fosse esaurito (cfr. *Bollettino*, T. XI, p. 60-64), sembrava rimandare la fine dell' impresa ad un' epoca che era impossibile precisare; onde qualche indugio ci sembrò consigliabile. Ma ora, risolta la questione coll' intervento del dott. Wieleitner, non vogliamo ritardare più oltre a segnalare e raccomandare ai nostri lettori il volume con cui il detto professore di geografia al Politecnico di Monaco, conferma la verità della massima " on revient toujours à ses premiers amours „, mostrandosi tuttora degno di un buon posto fra gli storici della matematica. Avvinto da antica amicizia e costante ammirazione a M. Cantor, egli scelse come propria guida le *Verlesungen über Geschichte der Mathematik*, senza però limitarsi a farne un semplice sunto, trovando anzi non infrequenti occasioni per aggiungere sensate osservazioni e gustose notizie, di molte delle quali l' origine va cercata negli studi sopra le scienze naturali e la loro storia, alle quali egli ha consacrato molte veglie non infeconde. Con agile penna egli conduce nel volume che ci sta sott' occhio i suoi lettori a contemplare gli stadi successivi per cui è passata la nostra scienza a partire dall' antichità più remota sino al momento in cui, con l' apparizione di Cartesio, ha principio l' era moderna. Indichiamo brevemente l' itinerario del bel viaggio in cui egli fa la parte di pratico cicerone!

Il I Capitolo è dedicato a raccogliere l'eco dei primi vagiti emessi dalla scienza nostra; quando essa era bambina l' indole sua era ben diversa da quella che manifestò adulta, chè allora sem-

Digitized by Google

brava destinata all'ufficio modesto di ausiliare della pratica, mentre poi, abbandonato qualunque contatto con la vita reale, divenne il modello delle scienze di puro ragionamento. Gli svariati procedimenti aritmetici e geometrici concepiti in origine cominciarono a ricevere una prima coordinazione per opera degli abitanti della Mesopotamia e dell'Egitto, della Cina e dell'India: ad essi sono consacrati i Cap. II-IV del volume güntheriano: nei quali, fra l'altro, l'A. non manca di far cenno delle gravi difficoltà che oggi ancora presenta la questione di determinare la scambievole dipendenza fra la scienza europea e quella orientale.

Nel Capitolo successivo entra in scena il popolo greco, dal destino chiamato a dare alle scienze esatte (e non soltanto ad esse) la fisonomia, il contenuto, le tendenze che esse sembrano destinate a conservare per sempre. Ivi l'A., dopo di avere date alcune informazioni sopra il sistema di numerazione in uso presso gli antichi Greci, fa conoscere l'opera matematica di Talete e Pitagora, poi porge notizia intorno alle origini ed ai primi tentativi di soluzione dei tre problemi classici, il che gli offre l'occasione di far conoscere ai proprii lettori gli Eleati Ippia e Zenone, poi Antifonte e Brisone, Ipocrate da Chio (il primo insegnante privato di matematica che ricordi la storia), Platone ed Aristotele, Leodamante, Archita da Taranto, Eudosso da Cnido, Menecmo (istitutore di Alessandro Magno) ed Aristeo.

Al periodo, che l'A. chiama « classico », della geometria greca è consacrato il Cap. VI; nel quale si trovano esposti, con concisione e chiarezza, il piano ed i risultati delle immortali scritture di Euclide, Archimede ed Apollonio. Dei matematici che ne seguirono le orme gloriose tratta il Cap. seguente, ove campeggiano Ipparco, al quale il Nostro attribuisce la paternità del concetto di coordinate, Erone e Tolomeo (1) e nei quali rappresentano una parte secondaria, ma non inonorata, Diocle, Perseo, Zenodoro, Menelao.

L'ordine cronologico, a cui il Günther si è proposto di attenersi rigorosamente, lo obbliga a questo punto di abbandonare la Grecia per volgersi a Roma (Cap. VIII), da cui la Grecia nulla seppe apprendere nel campo scientifico. Dopo tale digressione (sulla cui opportunità noi facciamo qualche riserva) il nostro A. ritorna al popolo ellèno per descrivere il così detto « periodo di

(1) A pag. 133 l'A. dice che l'*Almagesto* di Tolomeo porta nell'originale il nome *Μεγαλη συνταξις* mentre invece s'intitola *Μαθηματικη συνταξις*.

Digitized by Google

decadenza „, nel quale però brillano Pappo e Diofanto, accanto a Sereno, a Proclo, a Nicomaco (1) ed ai due Teoni, e per fare una compendiosa rassegna della « matematica bizantina „, la quale con le raccolte di esercizi scolastici, chiude infelicemente la storia della matematica presso i Greci.

Con ciò si è abbandonata l'antichità e si è penetrati nell'età di Mezzo: epoca di tenebre, durante la quale, se la scienza nostra compì qualche progresso, fu grazie all'intervento dei popoli a cui prima non si credeva di poter fare assegnamento: sono gli Indiani e gli Arabi, ai quali il nostro A. dedica tre succosi Capitoli, istruttivi quanto interessanti, dai quali si apprende come l'aritmetica *pratica*, con l'introduzione delle cifre oggi in uso, abbia assunto l'aspetto che si ritrova in tutti i nostri manuali scolastici, e come l'aritmetica *teorica* con l'uso di simboli opportuni abbia subìta la profonda trasformazione che era indispensabile affinchè divenisse l'onnipossente strumento che è la nostra algebra.

A paragone di pensatori pieni d'ingegno e d'iniziativa quali gli Indiani Aryabhatta, Brahmagupta e Bâskara, quali gli Arabi Mohammed ibn Musa, Tâbit ibn Kurrah, Abu Abdallah al Battani, Abul Wâfa, ecc. appariscono quali ombre quasi insignificanti i monaci che durante il Medio Evo furono inchinati come persone per dottrina eccellenti: Beda il Venerabile, Alcuino, Gerberto; e non a torto lo furono; chè gli è al culto quasi ascetico tributato alla scienza da queste vestali, che si deve se il sacro fuoco della ricerca sentifica non si spense: ravvivato e potentemente alimentato all'epoca del Rinascimento potè illuminare le generazioni future.

E la rinascita per la scienza nostra s'inizia al principio del XIII Secolo, con la pubblicazione del *Liber Abaci* di Leonardo Pisano, al quale il nostro A. a ragione consacra un intero Capitolo (il XV). A lui seguono (Cap. XVI) matematici di varia lingua, fra cui emerge Giordano Nemorario.

Il periodo della Riforma, studiato nel Cap. XVII, è caratterizzato da due grandi nomi: Peuerbach e Regiomontano, i riformatori della trigonometria; ma allora fiorirono anche il Cardinale di Cusa ed il Widman, Leonardo da Vinci e Luca Paciuolo Giacomo Lefèvre e Nicola Chuquet, che con intenti diversi ed

(1) A pag. 136 la formola che dà la rappresentazione dei cubi come somma di quadrati è data sotto forma errata che la rende inintelligibile; si deve leggere:

$$(n+1)^3=(n^2+n+1)+(n^2+n+3)+\ldots+(n^2+3n+1)$$

Digitized by Google

in varia misura contribuirono all'accrescimento delle nostre cognizioni matematiche.

I tre ultimi Capitoli dell'opera del Günther trattano dei secoli XV e XVI, quest'ultimo, naturalmente, limitato all'anno 1637, nel quale comparve per la prima volta la *Géométrie* di Descartes. Nel primo di essi vengono esposte a alcune generalità caratteristiche dell'epoca indicata; nel secondo viene esaminato lo sviluppo storico delle discipline aritmetiche nel periodo 1500-1637 ed altrettanto viene fatto nel terzo riguardo alle discipline geometriche. Così il lettore apprende per quale strada siasi giunti alla scoperta dei logaritmi e quali siano stati gli artifici usati dai primi matematici che risolsero le equazioni letterali di 3°. e 4°. grado; viene condotto a venerare gli uomini famosi che rispondono ai nomi di Nepere, Girard, Tartaglia e Cardano, Vieta e Harriot, Copernico e Retico e comincia a scorgere (con la comparsa di Keplero e Cavalieri) il bagliore antelucano che prelude al giorno in cui il concetto d'infinito determinerà l'inizio dell'epoca moderna, alla quale sarà consacrato il II volume di questa storia.

Di questo breve riassunto del I emerge che la lettura di esso va consigliata a tutti coloro che aspirano di ottenere, senza grande dispendio di tempo, un concetto esatto dello sviluppo storico della nostra scienza sino a Descartes; tanto più che l'A., chiudendo il suo volume con un *Elenco* di opere storiche, ha mostrato di interessarsi a coloro che intendono approfondirsi nello studio della storia, e, corredandolo di un accurato indice dei nomi propri citati, ha provveduto anche ai bisogni di coloro che desiderano di avere a propria disposizione una comoda opera di consultazione.

I criteri in base a cui venne concepito e scritto il II volume dell'opera in esame nulla hanno a che vedere con quelli che governarono la compilazione del I. Mentre in questo il metodo di esposizione si può ritenere ispirato da Montucla e Cantor, nell'altro si trova un riflesso della procedura adottata dal Tröpfke, chè l'elemento biografico è totalmente scomparso e la ripartizione è fatta esclusivamente in base alle varie teorie, come risulta evidente dal seguente indice dei Capitoli che costituiscono il volume che ci sta sott'occhio:

I. *Aritmetica.* II. *Algebra.* III. *Teoria dei numeri.* IV. *Calcolo combinatorio e probabilità.* V. *Preistoria del calcolo infinitesimale.* VI. *Scoperta e primo studio di sviluppo del calcolo infi-*

Digitized by Google

nitesimale. Serie infinite. VII. *Costituzione sistematica del calcolo infinitesimale e periodo di sviluppo formale della teoria delle serie.* VIII. *Equazioni differenziali.* IX. *Calcolo delle variazioni e calcolo delle differenze. Interpolazione.*

Tale mutamento d'indirizzo non stupirà chi sa come, di mano in mano che ci si accosta all'epoca attuale, le varie teorie matematiche assumono individualità propria e procedono per proprio conto, mentre gli scienziati tendono a specializzarsi in un ristrettissimo campo d'investigazioni; onde il seguire separatamente lo sviluppo di ogni teoria sembra sistema veramente corrispondente allo svolgimento dei fatti ed allo stato delle cose. Tuttavia sarebbe desiderabile che, di quando in quando, lo storico abbandonasse le teorie speciali per fare esposizioni succose dei risultati acquistati in un dato periodo di tempo e della fisonomia scientifica dei personaggi più eminenti, chè soltanto in tal modo riesce possibile a chi di legge di formarsi un adeguato concetto dell'evoluzione storica della matematica nel suo insieme e dell'opera scientifica degli uomini veramente rappresentativi.

A complemento di queste brevi notizie sul sistema di esposizione adottato nel volume Braunmühl-Wieleitner aggiungiamo che ivi si trovano opportuni cenni sopra la matematica giapponese, quale risulta da pubblicazioni recenti, e che di quando lo scrittore sorpassa il confine cronologico imposto alla propria narrazione per dare notizia dei miglioramenti di cui certe teorie si avvantaggiarono nel corso del Secolo XIX: ottimo sistema che aumenta l'interesse ed agevola il compito di misurare quanto fecero gli scienziati precedenti!

Ci sia lecito chiudere questo cenno generale sopra un'osservazione speciale. A pag. 148, al termine di una breve esposizione del dibattito avvenuto fra Leibniz e Newton a proposito dell'invenzione del Calcolo infinitesimale, si trova una nota a piede di pagina ove è detto che quell'esposizione, fatta dal Braunmühl appoggiandosi al III Volume delle *Vorlesungen* del Cantor, secondo il parere di G. Eneström, avrebbe bisogno, in parecchi punti, di modificazioni sostanziali. Ebbene, secondo noi, era molto meglio togliere del tutto quest'avvertenza; in primo luogo in base all'antica massima " quod gratis asseritur gratis negatur „; in secondo luogo perchè l'opera in questione, fa parte di una collezione di Manuali scolastici: ora non è porre il giovane lettore in una condizione analoga a quella in cui trovavasi il biblico asino di Buridano l'imporgli di scegliere fra la via indicata da Cantor-

Digitized by Google

Braunmühl e quella (per di più nemmeno tracciata) che consigliano Wieleitner-Enestrom? Auguriamo che in una prossima edizione quella nota venga soppressa e nel testo si legga l'esposizione di quella celebre contesa, secondo le vedute dell'Enestrom: così tutti avranno il mezzo di decidere se preferire questa o quella che si apprende dalle Lezioni del Cantor.

G. L.

Logica matematica.

A. N. Whitehead and B. Russell, *Principia Mathematica*. Vol. I, Cambridge, University Press, 1910, pag. 666; Vol. II, 1912, pag. 772.

Nota: Recensione que seque, es scripto in « Latino sine flexione ». Omni vocabulo es thema latino. Substantivo, adjectivo, pronomen, habe forma de ablativo, p. es.: *isto, opere, grandioso* etc.; aut de nominativo, quando nominativo latino non habe suffixo de casu, p. es., *nomen, axioma, idem*. Verbo habe forma de imperativo latino: *es, consta*. Formas irregulare es facto regulare. Suffixo *-s* indica plurale, quando es necessario.

Isto opere grandioso es relativo ad principios de mathematica, objecto de numeroso studio de mathematicos et philosophos in ultimo tempore. Opere completo consta etiam ex tertio volumen, in corsu de publicatione.

(Tomo I, pag. V). « Subjecto de præsente libro surge ex conjunctione de duo differente studio moderno. Uno es labores de analystas et de geometras que formula et systematiza axiomas, et labores de Cantor et ceteros super aggregatos. Secundo studio es symbolismo de logica, que post necessario periodo de adolescentia, nunc, gratia cultores moderno, in parte in Italia, acquire technico adaptabilitate et logico potestate, essentiale ad mathematico instrumento pro stude principios de mathematica. Ex combinatione de isto duo studio emerge duo resultatu; id es (1): quod jam es assumpto, in modo tacito aut explicito, ut axioma, es aut non necessario, aut demonstrabile; (2) methodo que demonstra axiomas supposito, vale in regiones, ut de numeros infinito, que jam es putato inaccessibile ad scientia de homo ».

(Pag. 2) « Usu de symbolismo de logica es necessario; nam ideas que occurre in isto libro, es plus abstracto que ideas de lingua familiare; nullo vocabulo de lingua commune habe

Digitized by Google

sensu exacto de symbolos. Structura grammaticale de lingua commune non posside simplicitate necessario pro repræsenta pauco ideas plus simplice, sed multo plus abstracto, que surge in processu deductivo ".

Omni scientia habe vocabulario suo speciale. Vocabulos de Geometria aut non existe in lingua populare, aut habe valore differente et plus concreto. Logica-mathematica, que stude ideas, que in lingua populare es expresso, in modo pauco præciso, per vocabulos *et, aut, es,* et alio elemento grammaticale, non pote tribue ad isto elementos grammaticale valore plus abstracto, et debe construe novo instrumento pro exprime proprio ideas, id es lingua toto symbolico.

Symbolismo da alas ad mente de homo; sed suo usu exige studio et labore. Illos que, per defectu de exercitio, judica que symbolismo es ligamen, non es obligato ad adopta illo. Nos strue novo instrumento, et non destrue instrumentos existente. Grammatica de linguas naturale, ad elementos que exprime ideas necessario in nostro discursu, misce multitudine de elementos, que exprime concordantias grammaticale, aut repetitione, toto inutile in theoria, et que produce varietates de linguas nationale. Ergo, me puta lingua plus limpido et claro, si non habe elementos inutile; tale es ratione principale de meo « latino sine flexione », simile ad formulas de algebra et de logica. Ratione secundario es suo intelligibilitate immediato, superiore ad omni lingua naturale.

(Pag. 3) « Symbolismo es terso et limpido, et permitte de repræsenta longo propositione, in forma toto visibile ab oculo in idem tempore ». Auctores adopta, in parte, symbolos de *Formulario mathematico.* In aliquo casu, illos varia aut forma aut extensione de symbolos; et introduce numeroso symbolo novo. Ratione de divergentia es scopo differente de symbolismo in *Formulario* et in libro de Auctores.

In *Formulario*, logica-mathematica es solo instrumento pro exprime et tracta propositiones de mathematica commune; non es fine ad se; logica-mathematica es explicato in 16 pagina; uno hora de studio suffice pro cognosce quod es necessario in applicationes de isto novo scientia ad mathematica. Libro de nostro Auctores tracta logica-mathematica ut scientia in se, et suo applicationes ad theoria de numeros transfinito de vario ordine; quod exige symbolismo multo plus amplo. Es impossibile de expone toto symbolismo de auctores. Propositiones de auctores es

Digitized by Google

toto scripto in symbolos, cum demonstratione relativo; es impossibile de verte isto propositiones in lingua commune, que es multo plus longo, et non satis præciso. Ergo me verte plure propositione de Auctores in symbolos de *Formulario mathematico*, editio V, et que coincide cum notationes in libro:

A. Padoa, *La logique deductive*, Revue de Métaphysique et de Morale, 1912.

Pag. 5 et sequentes explica usu de litteras variabile: variabiles reale et apparente; divisione de propositione per punctos; definitiones.

Pag. 11. " Uno definitione es nec vero nec falso; nam es actu de volitione, non es propositione. In theoria, definitiones non es necessario, nam nos semper pote substitue definiente in loco de definiendo. Definitione habe solo utilitate typographico ".

Pag. 19 explica principio de homogeneitate in definitiones: " membro definiente et membro definiendo debe contine identico systema de litteras variabile reale. Ullo mathematico viola ce regula, et produce grave confusione ".

Auctores adopta signos:

$\frown$ (et) de multiplicatione in logica,

$\smile$ (aut) de additione,

$\sim$ (non) de negatione.

Λ (nihil), indica classe vacuo

V (toto), indica classe totale.

$\circ$ (es contento, vel seque).

Auctores distingue forma de signos præcedente, si es inter classes aut inter propositiones aut inter relationes; *Formulario* non varia forma de symbolos; reduce omni propositione, aut conditione, ad classe de objectos que satisfac isto conditione; et omni relatione inter x et y, ut classe de dyades $(x; y)$ que satisfac relatione, aut conditione cum duo variabile.

Auctores introduce symbolos Cls (classe), ϵ (propositione individuale) et $\imath$ (operatione inverso de ϵ), sub forma de accentu circumflexo (pag. 26).

Singulo propositione, in libro, es indicato per numero decimale, id es per parte integro, numero de capitulo, et parte decimale, que distingue propositione. Isto notatione es multo commodo, et me reproduce illo.

Parte primo de libro (pag. 89-342) es relativo ad logica-mathematica. Auctores considera 6 idea primitivo, in calculo de propositiones; introduce 10 propositiones primitivo; et explica

Digitized by Google

omni alio idea de calculo de propositiones, et de classes, et demonstra omni alio regula de logica.

Isto reductione de ideas et de propositiones primitivo de logica es toto novo. *Formulario mathematico*, in tomo I, incipe per calculo super propositiones, unde deduce calculo super classes. Tomo II seque itinere inverso. Tomo III contine solo serie de propositiones; indica que plure propositione habe charactere de « definitione possibile »; que plure propositione pote es reducto, aut demonstrato, per alio propositiones; id es, publica plure « demonstratione possibile »; sed construe nullo systema de ideas et de propositiones primitivo.

Propositiones primitivo de Auctores, es in parte expresso per lingua commune, et in parte in symbolos. Si nos verte symbolos de Auctores, in symbolos super classes, de *Formulario* t. V, propositiones primitivo symbolico es (pag. 100-101):

$a, b, c \in \text{Cls.} \supset$:

1·2	$a \smile a \supset a$	« tautologia »
1·3	$a \supset a \smile b$	« principio de additione »
1·4	$a \smile b \supset b \smile a$	« principio de permutatione »
1·5	$a \smile (b \smile c) \supset b \smile (a \smile c)$	« principio associativo »
1·6	$a \supset b . \supset . a \smile c \supset b \smile c$	« principio de summatione »

Et deduce regulas:

2·02	$a \frown b \supset a$	« lege de simplificatione »
2·16	$a \supset b . \supset . \sim b \supset \sim a$	« lege de transpositione »
2·06	$a \supset b . b \supset c . \supset . a \supset c$	« syllogismo »
2·08	$a \supset a$	« principio de identitate »

etc. etc.

Pagina 132 introduce notatione $(x).\ \varphi x$, que significa « propositione φx, continente variabile reale x, es semper vero, pro omni x ». Nos verte propositione φx in $x \in a$, ubi a es classe; et nos verte $(x).\ \varphi x$ per $x \in \text{V} . \supset_x . x \in a$ « si a es ente, aut elemento arbitrario de classe totale, tunc $x \in a$ ». Symbolo V de « toto, semper vero », in *Formul.* t. 1-4 occune solo in citationes historico, et in *Formul.* t. 5 es suppresso; nos semper substitue illo per classe variabile a, b,... que es « toto relativo ».

Pag. 132 tracta de propositiones existentiale, et sume ut propositione primitivo (pag. 136):

9·1 $\qquad a \in \text{Cls.} \, x \in a . \supset . \exists a$

« si a es classe, et x es uno a, tunc existe ullo a ».

Digitized by Google

Et deduce propositione, in symbolos de auctores:

9·2 $\vdash : (x).\ \varphi x . \supset . \varphi y.$

Supprime signo $\vdash$ « signo de assertione » que es implicito in numero de propositione; lege $x \in a$, ubi $a \in \mathrm{Cls}$, in loco de φx; seque:

$$x \in \mathrm{V} . \supset_x . x \in a : \supset : y \in \mathrm{V} . \supset . y \in a$$

Lege b in loco de classe V, et resulta:

$$a, b \in \mathrm{Cls} . b \supset a . y \in b . \supset . y \in a$$

que es uno forma de syllogismo.

9·22 $a, b \in \mathrm{Cls} . a \supset b . \exists a . \supset . \exists b$

Pag. 157 stude propositiones cum duo variabile, et expone regulas:

11·2 $x \in a . \supset_x : y \in b . \supset_y . (x ; y) \in c \mathrel{\therefore} = \mathrel{\therefore} y \in b . \supset_y : x \in a . \supset_x . (x : y) \in c$

« Si pro omni x in classe a, seque quod pro omni y satisfaciente conditione b, seque veritate de propositione c in x e y; tunc lice commuta duo deductione: pro omni y seque quod pro omni x es vero propositione ».

11·54 $\exists (x ; y) \ni (x \in a . y \in b) . =: \exists a . \exists b$

« Existentia de duo ente x, y tale que x es a, et y es b, vale existentia de a, et existentia de b ».

(*Formul.* t. V, pag. 12).

11·6 $\exists x \ni \exists y \ni (x ; y \in a) . = \exists y \ni \exists x \ni (x ; y \in a)$

« Existe x tale que existe y tale que conditione $x ; y \in a$ es vero; significa: existe y tale que existe x tale que... ».

Id es, lice commuta duo signo $\supset\supset$, cum indices differente; et duo $\exists\exists$ cum literas differente. Sed non lice commuta $\supset$ et $\exists$. Isto commutatione es facto, per errore, ab numeroso et celebre mathematico.

Pag. 176 defini æqualitate, cum regula de Leibniz:

13·101 $x = y . = : a \in \mathrm{Cls} . x \in a . \supset_x . y \in a$

« Objecto æqua y, si omni proprietate de x es proprietate de y »; et deduce proprietates reflexivo, symmetrico et transitivo de æqualitate.

Pag. 196 expone theoria de classes, deducto ex theoria de propositiones. Pag. 218 expone postulatos de algebra de classes, secundo Huntington.

Digitized by Google

Pag. 245 expone logica de relationes, theoria quasi toto novo. *Formulario* indica dyade (coppia, couple) de objectos x et y per $x\,;y$. In aliquo casu analystas scribe (x, y); sed isto notatione pote produce ambiguitates. Nam

20·04 $\qquad x, y \,\varepsilon\, a. =. x \,\varepsilon\, a. y \,\varepsilon\, a$

« $x, y \,\varepsilon\, a$ » significa « x es a, et y es a »; dum $x\,;y \,\varepsilon\, a$, aut $(x, y) \,\varepsilon\, a$ de notatione commune, significa que dyade $x\,;y$ es uno elemento de classe a.

Omni propositione $p\,(x\,;y)$ continente duo variabile reale x et y, exprime uno relatione inter x et y, et determina classe de dyades

$$(x\,;y) \,\imath\, [p\,(x\,;y)]$$

Pro explica notationes et propositiones de auctores, me introduce notationes sequente

(1) $\qquad$ Dyade $= z \,\imath\, \exists\, (x\,;y) \,\imath\, (z = x\,;y)$ $\qquad$ Def.

« dyade es omni ente z, que pote es reducto ad forma $x\,;y$ ».

(2) $\quad \mathrm{E}_1\,(x\,;y) = x \;.\; \mathrm{E}_2\,(x\,;y) = y \;.\; \mathrm{C}\,(x\,;y) = y\,;x$ $\quad$ Def.

« $\mathrm{E}_1 z$, si z es dyade, indica suo primo elemento; $\mathrm{E}_2 z$ es suo secundo elemento; $\mathrm{C}\,z$ es dyade converso ». Resulta:

(3) $z \,\varepsilon$ Dyade. c. $z = \mathrm{E}_1 z\,;\mathrm{E}_2 z \;.\; \mathrm{C}\,z = \mathrm{E}_2 z\,;\mathrm{E}_1 z \;.\; \mathrm{CC}\,z = z.$

$$\mathrm{E}_1\,\mathrm{C}\,z = \mathrm{E}_2 z \;.\; \mathrm{E}_2\,\mathrm{C}\,z = \mathrm{E}_1 z$$

Si r es classe de dyades, aut relatione, tunc $\mathrm{E}_1\,{}^{\backprime}\,r$ (ubi signo $^{\backprime}$ es definito in *Formul.* V, pag. 77) es vocato ab Auctores « dominio de r », et $\mathrm{E}_2\,{}^{\backprime}\,r$, aut $\mathrm{E}_1\,{}^{\backprime}\,\mathrm{C}\,{}^{\backprime}\,r$, es « dominio converso de r » (pag. 261); et classe $x \,\imath\, [x\,;y \,\varepsilon\, r]$ es « referentes de y in relatione r » (pag. 255).

31·33 $\qquad r \,\varepsilon$ Rel. ɔ. $\mathrm{C}\,{}^{\backprime}\,\mathrm{C}\,{}^{\backprime}\,r = r$

33·24 $\qquad r \,\varepsilon$ Rel. $\mathrm{C} : \exists\, r. =. \exists\, \mathrm{E}_1\,{}^{\backprime}\,r. =. \exists\, \mathrm{E}_2\,{}^{\backprime}\,r$

33·25·26 $r, s \,\varepsilon$ Rel. ɔ. $\mathrm{E}_1\,{}^{\backprime}\,(r \frown s) \,\mathrm{ɔ}\, \mathrm{E}_1\,{}^{\backprime}\,r \frown \mathrm{E}_1\,{}^{\backprime}\,s \;.\; \mathrm{E}_1\,{}^{\backprime}\,(r \smile s) = \mathrm{E}_1\,{}^{\backprime}\,r \smile \mathrm{E}_1\,{}^{\backprime}\,s$

33·32 $\qquad r, s \,\varepsilon$ Rel. $\mathrm{E}_1\,{}^{\backprime}\,r \frown \mathrm{E}_1\,{}^{\backprime}\,s = \Lambda.$ ɔ. $r \frown s = \Lambda$

N. 34 defini producto, in sensu logico, de duo relatione. In presente recensione, me indica illo per signo arithmetico $\times$.

34·01 $\quad r, s \,\varepsilon$ Rel. c. $r \times s = (x\,;z) \,\imath\, \exists\, y \,\imath\, (x\,;y \,\varepsilon\, r.\, y\,;z \,\varepsilon\, s)$ $\quad$ Def.

id es, relatione $x\,;z \,\varepsilon\, r \times s$ resulta ex eliminatione de y ex relationes $x\,;y \,\varepsilon\, r$ et $y\,;z \,\varepsilon\, s$.

Digitized by Google

Auctores enuntia et demonstra proprietates:

$p, q, r, s \in \text{Rel.} \supset$.

34·2 $\quad \text{C}`(r \times s) = (\text{C}`s) \times (\text{C}`r)$

34·21 $\quad p \times q \times r) = (p \times q) \times r$

34·25 $\quad p \times (q \smile r) = (p \times q) \smile (p \times r)$

34·26 $\quad (p \smile q) \times r = (p \times r) \smile (q \times r)$

34·34 $\quad r \supset p . s \supset q . \supset . r \times s \supset p \times q$

34·36 $\quad \text{E}_1`(p \times q) \supset \text{E}_1`p \quad . \quad \text{E}_2`(p \times q) \supset \text{E}_2`q$

(*Continua*).

Analisi.

L. Zoretti. *Leçons sur le prolongement analytique.* Paris, Gauthier-Villars, 1911: 8° p. VI + 117. (Prezzo, fr. 3.75).

In questo volumetto, che fa parte dell'interessante collezione diretta da E. Borel, l'autore si propone di trattare principalmente due questioni fondamentali relative alle funzioni analitiche: la determinazione del campo di esistenza d'una funzione, e lo studio del modo di comportarsi di essa nell'intorno d'un punto singolare: questioni generali e difficili, e ben lontane dall'essere completamente risolte.

L'autore prende come punto di partenza (Cap. 1) la teoria degli aggregati; dopo aver richiamato il teorema d'esistenza dei punti limiti ed alcune definizioni fondamentali che ne conseguono, le proprietà principali degli aggregati chiusi e quelle degli aggregati perfetti ad una ed a due dimensioni, dimostra che un aggregato numerabile di aggregati chiusi, nessuna parte dei quali è continua, non contiene alcuna parte continua; distingue i continui a due dimensioni in superficiali e lineari, secondochè hanno o non hanno punti interni; confronta il concetto di continuo lineare con quello più comprensivo di curva di Jordan. Si trattiene in particolare sugli aggregati totalmente discontinui, cioè non contenenti alcuna coppia di punti ben concatenata, e dimostra che, dato un punto a d'un insieme di tale specie, entro qualunque cerchio col centro in a si può descrivere un contorno semplice contenente a e non passante per alcun punto dell'insieme. Definisce poi l'aggregato limite d'un aggregato E (α) funzione d'un parametro α, e fa vedere che, se gli aggregati E (α) sono continui ed hanno un punto limite comune, l'aggregato limite è continuo.

Digitized by Google

Nel Cap. 2 l'A. prende le mosse dalle definizioni classiche di continuazione analitica e di punto singolare; mostra col mezzo d'esempi come lo studio delle funzioni a più valori metta in luce circostanze nuove ed inattese: un punto può essere singolare per certi rami della funzione e regolare per altri; il numero dei rami d'una funzione può essere diverso in parti differenti del piano; l'insieme dei punti singolari d'una funzione ad infiniti valori può non essere chiuso. Ciò porta alla necessità di introdurre una nuova definizione di punto singolare; secondo l'autore, un punto è singolare, se si può continuare analiticamente la funzione sopra una certa linea sino a questo punto, ma non oltre. Per tal modo i punti del piano restano divisi in tre categorie: punti regolari, punti singolari, e punti esterni al campo d'esistenza della funzione. Lo studio delle funzioni ad infiniti valori è facilitato dall'uso delle superficie a più fogli, alle quali l'autore dedica un breve cenno. Egli passa poi a dimostrare che, dato un aggregato chiuso di punti, esiste sempre una funzione uniforme di cui questo è l'aggregato singolare. Il problema analogo per le funzioni a più valori, quello cioè di determinare le condizioni a cui un aggregato deve soddisfare perchè esista una funzione di questa specie di cui esso sia l'aggregato singolare, non è risolto; qui si stabilisce soltanto una condizione sufficiente, ed è che essi sia costituito da un insieme numerabile di aggregati chiusi. Una classificazione dei punti singolari dovrebbe aver per base la natura dell'aggregato singolare nelle vicinanze dei singoli suoi punti, ma qui si incontra qualche difficoltà, specialmente per riguardo alle funzioni a più valori; maggiori difficoltà presenta lo studio delle linee singolari *(coupures)*, che è ancor tutto da farsi. Il concetto di *campo d'indeterminazione* relativo ad un punto singolare, introdotto da Painlevé, permette di classificare i punti singolari sotto un altro punto di vista, sotto quello cioè dell'insieme dei valori a cui tende la funzione mentre la variabile tende al punto singolare. In questo senso sono da distinguersi innanzi tutto i punti per i quali il campo d'indeterminazione si riduce ad un punto; tali sono i poli e i punti critici algebrici, i quali possono anche considerarsi come punti regolari, ma la stessa proprietà può pure appartenere a punti singolari essenziali (non isolati), e questi si denotano col nome di *punti trascendenti ordinari*. Gli altri *(punti trascendenti essenziali)* si dividono in *punti d'indeterminazione completa* (quali i punti singolari esenziali isolati) ed in *punti d'indeterminazione incompleta*. Tutti questi vari tipi esistono effettivamente, come si

Digitized by Google

dimostra con esempi. Ma è curioso osservare, che vi sono punti singolari, i quali sfuggono alla precedente classificazione, perchè non esistono linee tendenti ad essi lungo le quali la funzione sia regolare. Chiude lo studio sul concetto di funzione analitica un breve cenno intorno al teorema di Poincaré sull'uniformizzazione delle funzioni.

Il Cap. 3 contiene una dimostrazione del teorema detto comunemente di Weierstrass, che si può enunciare così: un punto singolare essenziale isolato è un punto d'indeterminazione completa. Tale proprietà viene estesa ai punti limiti di punti d'indeterminazione completa, e il capitolo termina con poche osservazioni intorno al teorema di Picard.

Nel Cap. 4 l'autore espone i tentativi di Painlevé di estendere il teorema di Weierstrass ai punti singolari formanti un insieme di scontinuo non numerabile, ne fa un'acuta critica, e riporta l'esempio dato da Denjoy di una funzione avente un insieme discontinuo di punti trascendenti ordinari.

Nel Cap. 5, dedicato alle linee singolari, tra le molte questioni accennate intorno al nuovo e difficile argomento si trova un solo risultato positivo: esistono funzioni finite e continue in un'area ed aventi in essa delle linee singolari. Possiamo aggiungere che esistono funzioni uniformi finite e continue in tutto il piano, tranne il punto all'infinito, e di cui tutti punti del piano sono punti singolari; tale è la funzione definita dalla relazione:

$$f(z) = \varphi(x) \quad \text{per} \quad z = x + iy,$$

dove $\varphi(x)$ è la nota funzione di Weierstrass priva di derivata.

L'ultimo capitolo (Cap. 6) studia particolarmente le funzioni inverse delle funzioni uniformi: si dimostra, sulle tracce di Painlevé, che, se $w(z)$ è uniforme e non ha linee singolari, $z(w)$ non ha punti trascendenti essenziali, e si estende questo teorema alle funzioni $w(z)$ il cui aggregato singolare è costituito da una linea. Uno studio più profondo sull'andamento d'una funzione nelle vicinanze d'un punto singolare esige l'introduzione del concetto di *campo d' indeterminazione secondo una linea*; una proprietà del campo d'indeterminazione secondo una linea è questa: se D è il campo di indeterminazione corrispondente ad un punto a, esistono linee che vanno ad a e per le quali il campo d'indeterminazione è ancora D. Meritano speciale considerazione le funzioni inverse delle funzioni intere; l'autore stabilisce una condizione necessaria, ma non sempre sufficiente, perchè un punto singolare d'una tale fun-

Digitized by Google

zione sia trascendente, ed osserva che alcuni dei risultati dati da Boutroux per le funzioni di questa specie non possono ritenersi come dimostrati in tutta la loro generalità.

Il volume termina con una breve nota contenente alcuni esempi di funzioni con linee singolari.

Il carattere di quest'opera è lo stesso delle altre della medesima collezione. L'autore non si prefigge di esporre lo sviluppo completo, sistematico, di una teoria, ma piuttosto di presentare un quadro sintetico dello stato attuale di essa; cerca di mettere in luce i punti sinora inesplorati; evita, per quanto è possibile, i lunghi calcoli e le dimostrazioni minute; comunica al lettore, in quella forma attraente che è tutta propria degli scienziati francesi, non soltanto i risultati sicuri delle ricerche sue o d'altri, ma anche i propri dubbi e le proprie presunzioni. Diremmo anzi che tale carattere ci sembra più accentuato in questo volume che in altri, forse per natura stessa dell'argomento. Non è qui il luogo di discutere dei vantaggi e degli svantaggi che presenta un tal metodo d'esposizione, innegualmente simpatico e suggestivo; certo — e se ne hanno esempi classici — esso ha condotto più d'una volta autori eminenti a qualche imprecisione, che l'opera di riduzione delle loro idee a forma più rigorosa avrebbe ad essi evitato. A ciò probabilmente sono da attribuirsi alcune inesattezze che abbiamo osservato nelle presenti Lezioni, e che vogliamo far notare.

A p. 8 si legge che, se nessun derivato d'un aggregato di punti è finito, esiste un aggregato di punti comuni a tutti i derivati, e che questo è perfetto. Ciò in generale non è vero; si può affermare soltanto che l'aggregato comune chiuso, ma è facile costruire esempi per cui esso non è perfetto (p. es. consta d'un numero finito di punti).

A p. 9 l'autore asserisce che " sans doute „ qualunque insieme di punti o è numerabile o ha la potenza del continuo. La cosa è da tempo ritenuta probabile, ma sinora non è stata dimostrata, mentre quelle parole potrebbero far credere il contrario.

A p. 15 si legge che un insieme connesso è " dense en lui-même „. Ma noi abbiamo cercato invano nelle pagine precedenti la definizione degli aggregati così designati.

A p. 31 l'autore dice che, se sul cerchio di convergenza d'una serie di potenze non vi fosse un punto singolare, il limite inferiore dei raggi di convergenza sulla circonferenza non potrebbe

Digitized by Google

essere nullo. Ciò è vero, ma è meno evidente che non sembri, ed esigerebbe una non breve dimostrazione.

A p. 36 non ci è riuscito di mettere d'accordo le figure col testo, nè di giustificare il disaccordo con alcun errore materiale.

A p. 57 l'autore considera un'infinità numerabile di linee, e su ciascuna di esse un numero finito di archi; prende un arco su ciascuna linea, e dice che così si ha un insieme numerabile di combinazioni. Ora, supponendo che su ciascuna linea si considerino anche soltanto due archi, e designandoli rispettivamente colle cifre 0 ed 1, a ciascuna combinazione di archi corrisponderà un numero compreso tra 0 ed 1 scritto nel sistema di numerazione binario, e reciprocamente; sicchè l'insieme delle combinazioni ha la potenza del continuo. Pertanto non valgono le conseguenze tratte da quella premessa erronea.

A p. 61 apprendiamo che i poli sono i punti in cui la funzione è sviluppabile secondo le potenze di $(z-z_0)^{-1}$. La definizione non è esatta; nell'intorno d'un polo la funzione ammette uno sviluppo secondo le potenze di $(z-z_0)$ contenente soltanto in numero finito di potenze negative. La stessa cosa è ripetuta a p. 65, dove si aggiunge che gli sviluppi secondo potenze negative conservano le proprietà essenziali delle serie intere, dimenticando che uno sviluppo di questo tipo ha luogo nell'intorno di ogni punto singolare essenziale isolato, dove la funzione è completamente indeterminata.

Ciò che si legge verso la fine della p. 103 potrebbe far credere che non esistano linee che vadano ad un punto d'indeterminazione completa e lungo le quali la funzione tenda ad un limite determinato, mentre appunto poche righe innanzi l'autore si propone di studiare le linee aventi questa proprietà. E, che tali linee esistano, lo prova l'esempio semplicissimo di e^z, che tende $a+\infty$ quando z percorre l'asse reale positivo.

Malgrado queste piccole mende, le presenti Lezioni costituiscono un pregevole contributo allo studio di alcuni tra i problemi più interessanti della teoria delle funzioni analitiche.

G. Vivanti

Digitized by Google

Configurazioni.

G. Gallucci, *Le configurazioni.* Atti della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, Vol. XV della II Serie, 1911. N. 4, 4° p. 79.

La presente memoria venne premiata dalla R. Accademia di Napoli nel concorso dell'anno 1910 in seguito ad una Relazione di P. del Pezzo, che giudichiamo opportuno di qui riferire:

« Per l'anno 1910 la nostra Accademia ha bandito un concorso, col premio di lire mille, nel seguente tema:

Esposizione sistematica delle nozioni sinora acquisite sulle configurazioni geometriche del piano e degli spazii mettendola in relazione con la teoria delle sostituzioni e portandovi, possibilmente, qualche nuovo contributo.

Ci è pervenuto, in tempo utile, un solo manoscritto contrassegnato dal motto « Geometrica geometrice ». Consta di centocinque pagine ed è diviso in tre parti.

La prima parte contiene la bibliografia ed un cenno sintetico intorno allo stato presente delle ricerche sull'argomento. E' suddivisa in otto paragrafi che trattano degli esempii più antichi di configurazioni, dell'esagrammo di Pascal, della configurazione armonica dei tetraedri più volte omologici, della configurazione di Kummer, delle ventotto tangenti doppie di una quartica piana e le ventisette rette della superfice cubica, delle configurazioni con elementi in parte immaginarii, del legame con la teoria dei gruppi, e di altre questioni più generali. Siffatta larga ed accurata esposizione storica e bibliografica rileva subito che l'autore è interamente padrone del suo soggetto.

Nella seconda in cinque paragrafi si definiscono certe figure ψ costruite da rette di tre triangoli a due a due triomologici, si trovano siffatte figure all'esagrammo e nella configurazione armonica, scoprendone nuove proprietà e studiando la distribuzione dei punti ove s'incontrano due sole rette della configurazione. Inoltre, sempre in dipendenza delle ψ, si costituiscono due nuove configurazioni.

Nella terza parte, divisa in sei paragrafi, definite alcune operazioni geometriche ω_1, ω_2 di sua invenzione, l'autore mostra come si possano da alcune semplici figure « ricavarne altre il cui gruppo è una facile estensione del gruppo delle prime, e

Digitized by Google

poi le classifica in un numero limitato di tipi dedotti di una figura nucleare.

Una teoria generale delle configurazioni in connessione coi gruppi di sostituzioni l'autore non dà. Solo ci presenta una nuova deduzione del gruppo della configurazione armonica e risolve il problema abbastanza generale, di assegnare per un determinato valore di n delle configurazioni il cui gruppo sia di ordine dato dalla forma 2^k ovvero 3.2^k. Il che può valutarsi come un contributo molto notevole in un campo di ricerche tuttora inesplorato.

Per le suddette considerazioni la sezione di Matematiche propone quindi che al lavoro presentato sia concesso il premio *p*.

Questa proposta venne accettata.

Geometria differenziale.

V. und K. Kommerell, *Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen.* II. Band. Zweite, erweiterte Auflage. Mit 12 Figuren (Sammlung Schuberte XLIV). Leipzig. Goeschen 1911 P. IV + 188 (Prezzo Mk. 5.80).

V. und K. Kommerell, *Spezielle Flächen und Theorie der Strahlensysteme.* Mit, 9 Figuren. (Sammlung Schubert LXII). Leipzig, Goeschen 1911 (p. 171) (Prezzo Mk. 4.80).

Questi due volumetti costituiscono la seconda edizione del secondo volume di un'opera che venne da noi già segnalata in queste colonne (*Bollettino* T. IX 1906, p. 89) volume il quale, come è noto, constava appunto di due sezioni, una relativa alla teoria generale delle superficie, l'altra alle superficie particolari ed ai sistemi di raggi. Malgrado questo mutamento di aspetto, il piano generale dell'opera rimase inalterato, ma lo svolgimento potè ottenere proporzioni molto maggiori. Onde non v'ha dubbio che il pubblico matematico confermerà ora il lusinghiero verdetto pronunciato otto anni or sono sopra l'opera in discorso.

G. L.

Digitized by Google

Geometria cinematica.

L. Crelier, *Systemes cinematiques.* 8° p. 100, Paris, Gauthier-Villars, 1911. (Prezzo, L. 2).

Questo volumetto, XXXI della Serie fisico-matematica della Collezione *Scientia*, porta nel frontispizio il ritratto di A. Mannheim. E bene a ragione l'A. ha deciso tale omaggio alla memoria dell'eminente matematico francese, a cui la Geometria matematica è debitrice di tanti decisivi progressi, dal momento che lo studio da lui fatto dei sistemi cinematici non è che una interessante applicazione dei procedimenti caratteristici di quella disciplina. Tali procedimenti egli suppone noti al lettore avendone già fatto oggetto di una pubblicazione speciale (1), e li applica successivamente allo studio del *sistema concoidale semplice,* al *sistema della curva kappa*, al *sistema strofoidale semplice*, al *sistema concoidale semplice*, al *sistema con due rotaje* (o r n i e r è s) *fisse* ed al *sistema biella-manorella.* Per ciascuno egli fa notare le numerose curve speciali a cui da origine, stabilendone le equazioni e le proprietà salienti. Emerge da ciò essere molteplici e profonde le somiglianze del presente volumetto con uno dell'Ebner, di cui ci occupammo a suo tempo (*Bollettino,* T. X, 1907, p. 88); ma chi ha presente il piano di questo non tarderà a riconoscere che il nuovo è ben lungi dall'essere una copia dell'altro. Ai lettori italiani esso va specialmente raccomandato, a tacer d'altro perchè concerne un ramo della geometria che ha trovato sinora presso di noi rari cultori. G. L.

Geometria projettiva ed analitica.

E. Ciani, *Lezioni di geometria projettiva ed analitica.* 8° gr. p. V + 525. (Pisa, Spoerri, 1912. Prezzo L. 20).

Questo bel trattato contiene quanto di Geometria projettiva e analitica si suole, da molti anni, svolgere nel 1° biennio delle nostre Università. L'esposizione perspicua e chiarissima, non ultimo dei suoi pregi, lo rende facilmente intelligibile anche a un principiante.

(1) *Géométrie cinématique du plan*, Bienne.

Digitized by Google

Darò ora un breve cenno della materia svolta.

Nel Cap. I si trovano esposte le nozioni fondamentali della geometria projettiva, svolte secondo il classico metodo di STAUDT: legge di dualità, forme fondamentali, triangoli e quadrangoli prospettivi e omologici, gruppi armonici.

Il Cap. II contiene la geometria analitica sulle forme di 1ª specie: qui, come anche nel seguito, sono accuratamente indicate le convenzioni intorno ai *valori* e ai *segni* degli angoli: punto questo che non sempre è curato come si dovrebbe.

Nel Cap. III sono studiate le projettività, in particolare le involuzioni, tra forme di 1ª specie. Le projettività vengono definite come prodotti di prospettività; lo studio è fatto col metodo sintetico; ma in fine del cap. trovasi anche la rappresentazione analitica di siffatte corrispondenze.

Al Cap. IV troviamo gli elementi di geometria analitica del piano. L'A., secondo un concetto che si va accentuando sempre più, si limita alle coordinate cartesiane non omogenee; vedremo nel seguito come Egli abbia felicemente evitato l'inconveniente che nella geometria projettiva presenta l'uso di siffatte coordinate: colle quali non si rappresenta tutto il piano projettivo, ma solo i suoi punti proprî.

Alle coniche sono dedicati i cap. V-XI.

Tali curve vengono dapprima definite come luogo dei punti comuni alle coppie di raggi omologhi in due fasci projettivi; ne son date le prime proprietà nel cap. V, in fin del quale trovasi anche la rappresentazione analitica mediante un'equazione di 2° grado, e quella parametrica.

Vien poi (cap. VI) studiata l'equazione generale di 2° grado in due variabili, rispetto alla sua riducibilità e ai suoi invarianti.

Il cap. VII è dedicato alla costruzione di una conica assegnata mediante 5 tra punti e tangenti (anche quando queste non passano per quelli); come mezzi per risolvere tal problema sono dati i teoremi di PASCAL e DESARGUES. Dei casi limiti di tali teoremi l'A., insieme alle note dimostrazioni di carattere intuitivo (utili didatticamente), dà giustamente anche le rigorose.

Nel Cap. VIII è studiata la polarità rispetto a una conica; essa vien definita analiticamente, e studiata con considerazioni ora analitiche, ora sintetiche.

Al Cap. IX troviamo la riduzione a forma normale delle equazioni delle coniche; da siffatte equazioni normali sono de-

Digitized by Google

sunte le proprietà relative al centro e ai diametri. Vengono poi (nel cap. X) studiati i fuochi.

Il Cap. XI tratta della ricerca dei punti comuni a due coniche. Tal problema, quando si fa uso di coordinate non omogenee, non è equivalente (come talvolta si afferma) al problema della risoluzione del sistema costituito dalle equazioni delle due coniche; epperò l'A. giustamente lo riconduce alla risoluzione di *una* equazione a *una* incognita: e ciò servendosi della rappresentazione parametrica delle coniche. Il cap. è poi dedicato in ispecial modo alla considerazione dei circoli osculatori e iperosculatori, e con alcuni utili consigli pratici relativi al disegno delle coniche.

Molto opportuno, in riguardo specialmente all'indole e allo scopo del libro, è il cap. XII, in cui sono studiate alcune curve algebriche di ordine > 2, e alcune curve trascendenti. Tale studio offre all'A. l'occasione di porgere allo studente alcuni addentellati col calcolo infinitesimale.

Nei Cap. XIII e XIV sono studiate, sinteticamente, le projettività tra forme di 2ª specie e, rispettivamente, fra coniche. Le prime son definite colla condizione di conservare la proprietà di appartenenza, e inoltre *di subordinare projettività tra forme di* 1ª *specie omologhe.*

Tal definizione (che nel campo complesso non sarebbe sovrabbondante) permette all'A. una rapida trattazione, secondo il metodo di Staudt: cosa che l'A. non avrebbe potuto fare, senza aggiungere alla definizione Staudtiana la condizione da noi sottolineata (non avendo Egli dimostrato che una corrispondenza tra due forme di 1ª specie che conservi i gruppi armonici è projettiva).

Nei Cap. XV-XX trovasi la geometria analitica dello spazio e la teoria delle quadriche; nel XXI alcune utili considerazioni, ed esempî, sulla rappresentazione analitica delle curve gobbe e delle superficie.

Infine il Cap. XXII contiene la teoria dell'omografia nello spazio (svolta sinteticamente); l'A. vi studia i principali tipi di collineazioni spaziali, avvertendo esplicitamente che non intende fare una classificazione completa.

Una scelta raccolta di esercizî trovasi in fine di ogni capitolo.

Da questa breve esposizione del contenuto del libro si vede come vi sia giustamente ripartita la materia, e alternato l'uso

Digitized by Google

dei due metodi analitico e sintetico. Si può quindi concludere che il libro sarà utilissimo nell' insegnamento, e accrescerà di un' altra pregevole trattazione la biblioteca dello studioso.

R. Torelli.

Notizie.

Il I centenario della morte di G. L. Lagrange, che ebbe luogo il 10 Aprile del corrente anno, non passò inosservato. Per iniziativa della R. Accademia delle Scienze di Torino gli *Annali di matematica* pubblicano due volumi (XX e XXI della III Serie) dedicati alla memoria di quel grande; inoltre nella seduta del 5 Maggio 1913 della Accademia delle Scienze di Heidelberg, a scopo commemorativo di quella data, fu da M. Cantor presentata una memoria di K. Bopp sopra *Eine Schrift von Ensheim*, che contiene una lettera di Lagrange non inclusa nell' edizione delle sue opere; finalmente nella seduta che tenne la Società matematica di Berlino il 30 Aprile 1913 fu letto un discorso sopra il sommo analista Italiano dal presidente A. Korn.

*
* *

Tema posto a premio dalla Facoltà Filosofica di Halle per l'anno 1913. " Esporre metodicamente e completare le ricerche fatte sinora sopra le curve gobbe fra le cui deve curvature in ogni punto passa a una relazione; in particolare investigare quelle curve le cui curvature sono legate da una relazione cubica ".

Premio Mk. 150, alla gara possono partecipare i soli studenti di quella Università.

*
* *

Concorso a premio per le matematiche. Non essendo stato presentato alcun lavoro al concorso sulla storia delle funzioni ellittiche, di cui si è parlato in questo *Bollettino*. (T. XIII, p. 80), l' Accademia di Bologna ha deliberato di rinnovarlo prorogandone il termine al 31 dicembre 1914.

Digitized by Google

*
* *

Il III congresso internazionale di studi storici ebbe luogo a Londra nei giorni 3-9 Aprile del corrente anno. Come nei precedenti una Sezione di esso fu consacrata a comunicazioni sopra la storia delle scienze fisico-matematiche e della medicina; riferiamo qui i titoli di quelli che rientran nel quadro del nostro *Bollettino*:

W. W. Rouse Ball, *Newton's Principia. Magic.*

G. Loria, *Le glorie matematiche della Gran-Brettagna.*

Silvanus Thompson, *Origin and developement of the compass. card.*

H. Turner, *Aristarchus of Samos.*

Clifford Albutt, *Palissy, Bacon and the revival of natural Science.*

Inoltre il prof. N. Bubnov fece una comunicazione nella Sezione di storia medioevale sopra *Guillaume de Malmesbury et la légende de Gerbert*, la quale tocca l'importante questione dell'invenzione delle nostre cifre.

Il prossimo Congresso avrà luogo a Pietroburgo, fra quattro anni.

*
* *

Una utilissima opera bibliografica. Nel render conto di un volume contenente i risultati degli studi fatti in Ungheria sopra la questione dell' indirizzo da darsi all' insegnamento secondario della matematica (*Bollettino*, T. XIV, 1912, p. 95) abbiamo notato come per scarsità di mezzi, fu impossibile la pubblicazione di una bibliografia sull' importante argomento, compilata dal prof. Goldziher. Ora siamo lieti di annunciare che, grazie all' intervento del prof. D. E. Smith, quella difficoltà fu superata: lo prova la *Bibliography of the teaching of mathematics 1900-1912 by* D. E. Smith *and* C. Goldziher, che forma il n. 29 (Washington, 1912) del *Bulletin* pubblicato dall' « United States Bureau of Education ». È un' opera diligentissima che comprende i titoli di 1849 pubblicazioni didattiche, distribuite in diciasette capitoli, e che si chiude con un indice per autori; siamo certi che sarà un *vademecum* indispensabile ai molti che aspirano a contribuire efficacemente all' invocata riforma della scuola media.

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE
ANNO XV, Fasc. III: Luglio, Agosto e Settembre 1913

MARIO PIERI

DI

BEPPO LEVI

Il 1° marzo 1913 Mario Pieri spirava in Pieve di Còmpito presso Lucca, tolto da male indomabile alla famiglia e agli amici, ancora in giovane età e mentre appariva nel pieno vigore delle sue forze.

Era nato in Lucca il 22 giugno 1860 dall'avv.° Pellegrino, dotto giureconsulto, e da Erminia Luporini. Dopo aver seguiti gli studi secondari tecnici, frequentando a Lucca la scuola tecnica, e a Bologna l'istituto, si iscrisse al primo anno di matematica nell'università di Bologna, nell'anno accademico 1880-81. Fra i primi maestri ch'egli vi ebbe mi piace qui ricordare il Pincherle, che subito ne conobbe il valore ed ebbe per lui stima ed affetto che il Nostro amava ricordare. E non fu senza vivo rincrescimento di quei maestri che, avendo ottenuto nel novembre 1881 un posto di allievo interno nella Scuola Normale Superiore di Pisa, passò a completare i suoi studi in quella università. Fra gli insegnanti che qui egli incontrò ricordiamo il Betti, il De-Paolis, il Dini, il Bianchi, il Finzi, il Nardidei. La sua natura lo spinse subito verso le ricerche geometriche e lo vediamo laurearsi con pieni voti il 27 giugno 1884 con una tesi " Sulle singolarità della Jacobiana di quattro, di tre, di due superficie ". Non pare che questo lavoro fosse pubblicato: forse un estratto di esso era intenzione del Pieri di pubblicare sotto il titolo " Sulle singolarità della Jacobiana nei punti e nelle curve multiple delle superficie che la individuano " che troviamo da lui citato, senza indicazione del luogo di pubblicazione, nel primo lavoro che di lui possediamo per le stampe, anche questo del 1884 (n. 1).

Digitized by Google

Dopo un breve insegnamento nel ginnasio di Livorno, il Pieri passò a Torino ove rimase fino al 1900, professore di geometria projettiva nella R. Accademia Mililare, e assistente alla cattedra di Geometria projettiva e descrittiva di quella università, di cui era titolare il Bruno, e in seguito il Berzolari. E a Torino io lo conobbi, prima come insegnante, poi come collega. Aveva condotto seco la madre, cui lo legò un affetto tenerissimo, e una sorella minore; e così la lunga residenza, confortata dalle cure e dagli affetti domestici, gli fecero amare quella città come una seconda città natale, ed ancora recentemente gli piaceva ricordarmi di avervi voluto conservare la cittadinanza acquisita.

Passò a Catania alla fine del 1900, chiamatovi da quella facoltà di scienze a coprire le cattedre di geometria projettiva e descrittiva e di geometria superiore; ed infine nel 1908 a Parma.

Nell'inverno del 1912 cominciò ad accusare una certa fatica nello svolgere le sei lezioni settimanali ch'egli usava, per la geometria proiettiva e per la descrittiva; ma egli appariva del resto nel pieno vigore delle sue forze, e, si può dire in un rifiorire di attività scientifica (poichè da poco s'era volto con successo e alacrità al calcolo vettoriale). Onde fu dolorosa sorpresa per tutti quelli che con lui avevano dimestichezza quando, pochi mesi dopo, la scienza medica ebbe a denunciare la malattia che doveva condurlo alla tomba e contro cui essa doveva rinunciare anche al solo tentativo della lotta.

Presto edotto della gravità del male, che per tutto un anno ancora doveva travagliarlo, fu esempio mirevole di forza d'animo; impossibilitato di parlare, continuò ugualmente a dirigere l'insegnamento che l'assistente svolgeva colla devozione che la sua bontà aveva saputo conquistare: continuava intanto ad occuparsi delle ultime sue ricerche, mentre egli stesso presiedeva, per un sentimento di dovere e senza speranza, all'applicazione su di sè dei recenti tentativi di cura del cancro che la scienza non ha per anco giudicato. Avesse la nobiltà della tempra potuto aver sopravvento sulla fierezza del male!

Il pensiero scientifico del Pieri fu essenzialmente geometrico. I primi suoi lavori accennano così all'indirizzo geometrico-differenziale (n. 1,3) come a quello della geometria algebrica (colla tesi di laurea già ricordata e la nota n. 2). Tosto però egli si avviò decisamente per quest'ultima via e vi si attenne per la maggior parte dei suoi lavori fino al 1895. Strumento principale di ricerca era

Digitized by Google

il principio di corrispondenza, e così egli fu condotto a studiarne l'estensione a casi non ancora considerati, dapprima nella forma di Chasles (Salmon, Zeuthen) (n. 6), quindi, con più minuto studio del modo di tendere dei punti corrispondenti alla coincidenza (n. 11) e per varietà non lineari (n. 9), appoggiandosi al metodo delle caratteristiche di Schubert.

Le ricerche del Pieri incominciano ad allontanarsi dal principio di corrispondenza, pur restando sempre nel campo algebrico -projettivo, verso il 1892, quando, insieme con minori studi evidentemente ispirati dalle sue occupazioni didattiche (n. 13, 14), Lo vediamo occuparsi di questioni attinenti alle trasformazioni razionali dello spazio (n. 15, 16, 17, 20, 22, 24, 27) e con tre note importanti di nuovo di geometria numerativa (n. 19, 25, 29) ma in molto diversa direzione.

Il Pieri aveva intanto pubblicato una limpida traduzione della " Geometrie der Lage „ dello Staudt (accresciuta dei primi capitoli dei " Beiträge „) ed il suo corso di Geometria projettiva all'Accademia militare. E furono indubbiamente questi lavori d'indole scolastica e gli altri eccitamenti che venivano dalle sue lezioni insieme colle amicizie contratte a Torino, a rivolgere il suo pensiero in un indirizzo che non doveva più abbandonare e che si può considerare come la più sicura estrinsecazione del Suo spirito: voglio dire lo studio dei Fondamenti. Debbo ricordare qui i nomi del Burali-Forti e del Peano: dal primo imparò il calcolo della logica deduttiva; del secondo gli furono modelli le ricerche sui principî dell'aritmetica e della geometria elementare.

La produzione del Nostro in questo indirizzo incomincia con tre note inserite negli Atti dell'Accademia delle scienze di Torino " Sui principî che reggono la geometria di posizione „ (n. 30, 31, 32) in cui si stabilisce un sistema di postulati mediante i quali si può fondare la geometria proiettiva sopra tre idee primitive (punto, retta, e segmento projettivo), ch'egli riduce poi subito a due sole (punto e retta) (n. 36). I risultati di queste ricerche sono poi riassunti e riordinati in una memoria d'insieme (n. 38). Nelle note precedenti il P. aveva fatto largo uso dei simboli della logica matematica; li volle escludere da questa nuova redazione allo scopo di renderne meno difficile la lettura alla generalità; ed alla stessa norma si attenne sempre in seguito, sebbene — com'egli ripete spesso nelle sue prefazioni, e come può ben farne fede chi più volte lo vide al lavoro — mediante l'uso di quel simbolismo egli con-

Digitized by Google

ducesse tutta la ricerca, considerandolo garanzia necessaria dell'esattezza dei ragionamenti.

Violando ora per un istante l'ordine cronologico per seguire piuttosto lo svolgimento del pensiero, voglio far cenno subito di due altri lavori che ai citati si riconnettono (n. 45, 46), l'uno dedicato a sostituire al postulato della continuità (di Dedekind) una minore richiesta che permetta di costruire la geometria projettiva di 1° e 2° grado, senza ammettere l'esistenza della totalità dei punti reali; l'altro dedicato ad estendere al campo complesso le nozioni svolte nei lavori citati pel campo reale.

Dall'analisi dei principî della geometria projettiva il P. era passato, fin dal 1898 a quelli della geometria elementare (n. 40): quì il desiderio di non allontanarsi troppo dalle forme che una secolare abitudine fa considerare come intuitive — colla non celata speranza che dallo studio teorico potesse derivare anche una esposizione didatticamente applicabile all'insegnamento secondario, lo induce a scegliere come idee primitive quelle di *punto* e *moto*: per quanto quest'ultima idea gli paresse assai più complessa del vero necessario. Già nella prefazione di questo lavoro e di nuovo in una comunicazione al Congresso Internazionale di filosofia (n. 41) infatti egli fa cenno di un sistema di geometria elementare in cui, anzichè all'idea di moto ci si richiami a quella di equidistanza di un punto da altri due: solo più tardi però egli pubblicò per disteso tale studio (n. 53), quando gli riuscì di dare ad esso la semplicità che a parer suo era necessaria.

Ma la scelta delle idee primitive di qualunque scienza deduttiva lascia largo campo all'arbitrario, ed il P. più volte cercò i medesimi fini partendo da sistemi diversi di idee primitive: così già nel 1898, indotto evidentemente dal pensiero che allora perseguiva di fondare in sistema ipotetico-deduttivo la geometria elementare sulle nozioni di punto e moto, ci diede un sistema di geometria projettiva appoggiato alle idee di *punto* e *omografia* (n. 39); così ancora espose più tardi un sistema di geometria projettiva fondato sulle idee di retta e di incidenza di due rette (n. 43); così ancora recentemente ci offrì una costruzione per postulati della geometria delle inversioni (di cui è ben nota la reciproca dipendenza colla geometria elementare) partendo dalle nozioni primitive di punto e cerchio (n. 54).

Una stretta affinità di pensiero lega tutte le ricerche di fondamenti: naturalmente quindi non poteva egli disinteressarsi

Digitized by Google

delle dispute sorte nei primi anni del secolo sui fondamenti logici dell'aritmetica: di qui i lavori n. 50, 52 nel primo dei quali si mostra un'interpretazione della nozione di numero intero nella nozione logica di classe finita, in modo da ricondurre ad un postulato attinente evidentemente alla logica l'affermazione della compatibilità (di cui molto s'era discusso sotto l'eccitazione del Poincaré e dell'Hilbert) del postulato d'induzione e degli altri postulati dell'aritmetica; nel secondo si propone una variazione nell'enunciato dei postulati dell'aritmetica, in modo da avvicinarsi maggiormente all'intuizione immediata e allontanare così l'eventualità degli accennati dubbi. Anche una ricerca aritmetica ha occasionato il lavoro n. 48, ove però l'argomento è veramente di logica pura e cioè un'analisi relativa al concetto di classe di classi.

Negli ultimi due anni era stato attratto dalle promesse che ha il calcolo vettoriale, nei più recenti sviluppi di Burali-Forti e Marcolongo, per la semplificazione di molte ricerche di geometria differenziale: ci lasciò in questo argomento alcune Note geometriche ad un libro di quei due autori (n. 56) e due memorie (n. 55, 57), ove si coordina la geometria differenziale delle congruenze di rette e dei sistemi di superficie alla geometria di campi vettoriali ad essi collegati.

L'opera scientifica del Pieri si distingue per la cura del metodo dell'ordine, del rigore. E furono tali le note del suo carattere: fu in ogni occasione sincero, esatto, onesto senza transazione possibile. Uomo di poche parole, non era facile ad espandersi; ma le più chiare virtù dell'animo gli si aprivano cogli intimi: ebbe pei fratelli e pei nipoti attenzioni più che paterne, cogli amici modestia, affabilità e premure non comuni.

LISTA DEI LAVORI DI MARIO PIERI (1)

1884

1 - Intorno alle superficie elicoidali. (Giornale della Società di Letture e conversazioni scientifiche. Genova, 1887).

(1) Ho disposto in questa lista i lavori del P. aggruppati per annate, prendendo a norma, quanto possibile, la data che egli usò quasi sempre apporre, e la quale naturalmente non coincide sempre colla data di pubblicazione. Qua e là ho dovuto accogliere altri criteri, ove questo veniva meno.

Digitized by Google

2 - Sopra alcuni problemi riguardanti i fasci di curve e di superficie algebriche. (Giornale di Matematiche, Vol. XXIV).

1885

3 - Intorno ad un teorema dei sigg. Betti e Weingarten. (Giornale di Matematiche, Vol. XXIV).

1886

4 - Sulle normali doppie di una curva gobba algebrica. (Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, (4) II).

5 - Sulle normali doppie di una superficie algebrica. (Rend. della R. Acc. dei Lincei (4) II 2° sem.).

1887

6 - Sul principio di corrispondenza in uno spazio lineare qualunque ad n dimensioni. (Rend. della R. Acc. dei Lincei, (4) III-1° sem.).

1888

7 - Sopra un teorema di geometria ad n dimensioni. (Giornale di Matematiche Vol. XXVI).

1889

8 - Sulle tangenti triple di alcune superficie del sest'ordine. (Atti della R. Acc. delle sc. di Torino Vol. XXIV).

1890

9 - Sulla corrispondenza algebrica fra due spazi rigati. (Atti della R. Acc. delle sc. di Torino, Vol. XXV).

10 - Sulla geometria projettiva delle forme di 4ª specie. (Giornale di Matematiche Vol. XXVIII).

1891

11 - Formule di coincidenza per le serie algebriche di coppie di punti dello spazio a n dimensioni. (Rend. del Circ. Matem. di Palermo. T. V.).

12 - Sopra un problema di geometria enumerativa. (Giornale di Matematiche, Vol. XXIX).

13 - Osservazioni geometriche intorno alle linee diurne di un

Digitized by Google

orologio solare. (Giornale della società di letture e conversazioni scientifiche. Genova, fasc. 1, 1892).

1892

14 - Sopra le linee uniformemente illuminate di una superficie qualunque. (Atti della R. acc. delle sc. di Torino. Vol. XXVII).

15 - Sulle trasformazioni involutorie dello spazio determinate da un complesso Hirstiano di rette. (Rend. del R. Istituto Lombardo. Serie II vol. XXV fasc. XV-XVI).

16 - Sulle trasformazioni birazionali dello spazio inerenti a un complesso lineare speciale (Rend. del Circ. Matemat. di Palermo, T. VI).

1893

17 - Sui sistemi lineari di coni. (Rivista di matematica, T. III).

18 - Sopra alcune congruenze di coniche. (Atti della R. Accad. delle Sc. di Torino, Vol. XXVIII).

19 - Sul problema degli spazi secanti. Nota 1ª. (Rend. del R. Istit. Lombardo. Serie 2ª vol. XXVI).

20 - Sui sistemi lineari di monoidi (Giornale di matematiche, vol. XXXI).

21 - Di due proprietà caratteristiche per superficie elicoidali (Lucca, Giusti).

22 - Le trasformazioni razionali dello spazio inerenti ad una conica. (Rend. del Circ. Matem. di Palermo T. VII).

23 - Teoremi da dimostrare (Giornale di matematiche vol. XXXI.

1894

24 - Trasformazione di ogni curva algebrica in altra priva di punti multipli. (Rivista di matematica, T. IV).

25 - Sul problema degli spazi secanti. Nota 2ª. (Rend. del R. Istit. Lombardo, Serie 2ª, Vol. XXVII).

26 - Per trovare graficamente i raggi di massima e minima curvatura nelle superficie quadriche. (El progresso matematico T. IV).

27 - Sulle trasformazioni razionali dello spazio che individuano complessi di tangenti. (Giornale di Mat. Vol. XXXIII).

28 - Thomae-Die Kegelschnitte in reinprojective Behandlung-Recensione.

Digitized by Google

1895

29 - Sul problema degli spazi secanti. Nota 3ª. (Rend. del R. Ist. Lombardo, (2) vol. XXVIII).

30 - Sui principii che reggono la geometria di posizione. Nota I (Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino, vol. XXX).

31 - Sui principii che reggono la geometria di posizione. Nota II. (Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino, vol. XXXI).

32 - Sui principii che reggono la geometria di posizione. Nota III. (Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino, vol. XXXI).

1896

33 - Un sistema di postulati per la geometria projettiva astratta degli iperspazii. (Rivista di Matematica, T. VI).

34 - Di alcune questioni metriche circa le superficie algebriche. (Giornale di matematiche Vol. XXXIV (IV, serie 2ª)).

35 - Sull'ordine della varietà generata da più sistemi lineari omografici. (Rend. del Circ. Matem. di Palermo, T. XI).

36 - Sugli enti primitivi della geometria projettiva astratta. (Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino, vol. XXXII).

1897

37 - Intermezzo. (Periodico di matematica, T. XII).

38 - I principii della geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo. (Memorie della R. Acc. delle Sc. di Torino (2) T. XLVIII).

1898

39 - Un nuovo modo di svolgere deduttivamente la geometria projettiva. (Rend. del R. Istit. Lombardo (2) XXXI).

1899

40 - Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo Monografia del punto e del moto. (Memorie della R. Acc. delle Sc. di Torino (2) vol. XLIX).

1900

41 - Sur la géométrie envisagée comme un système purement logique. (Bibliothèque du Congrès international de philosophie. III: Logique et histoire des sciences. Paris 1900).

Digitized by Google

42 - Sopra i sistemi di congruenze lineari che generano *semplicemente* lo spazio rigato. (Atti dell'Acc. Gioenia di Sc. Naturali, vol. XIV serie 4ª).

43 - Sui principii che reggono la geometria delle rette. (Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino vol. XXXVI).

1902

44 - Sul complesso cubico di rette che contiene una stella di raggi e un piano rigato. (Atti dell'Acc. Gioenia di Sc. Naturali (4) vol. XV).

1903

45 - Circa il teorema fondamentale di Staudt e i principî della geometria projettiva. (Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino vol. XXXIX).

1904

46 - Nuovi principî di geometria projettiva complessa. (Memorie della R. Acc. delle Sc. di Torino (2) LV).

1905

47 - Sulla definizione Staudtiana dell'omografia fra forme semplici reali. (Periodico di matematica vol. XXI).

48 - Sopra una definizione aritmetica degli irrazionali. (Bollettino dell'Acc. Gioenia di Sc. Naturali, fasc. LXXXVII).

1906

49 - Breve aggiunta alla Memoria: Nuovi principii di geometria projettiva complessa. (Atti della R. Acc. di Torino, vol. XLI).

50 - Sur la compatibilité des axiomes de l'arithmétique. (Revue de métaphysique et de morale, 13ᵉ année).

51 - Uno sguardo al nuovo indirizzo logico - matematico delle scienze deduttive. Discorso letto inaugurandosi l'anno accademico 1906-'907 nella R. Università di Catania. (Annuario della R. Università di Catania per l'anno accad. 1906-'907.

1907

52 - Sopra gli assiomi aritmetici. (Bollettino dell'Acc. Gioenia di Sc. Naturali, fasc. 2, serie 2).

*

Digitized by Google

1908

53 - La geometria elementare istituita sulle nozioni di " punto " e " sfera ". (Memorie della Società italiana delle scienze (detta dei XL), (3) T. XV).

1910

54 - Nuovi principii di geometria delle inversioni. Memoria I e II. (Giornale di matematiche vol. XLIX-L (2° e 3° della serie 3°).

1911

55 - Sulla rappresentazione vettoriale delle congruenze di raggi (Rend. del Circ. Matem. di Palermo T. XXXIII).

1912

56 - « Notes Géométriques » al volume: Analyse vectorielle générale. I - Transformations lineaires, par Burali-Forti et Marcolongo.

57 - Sui sistemi ∞^1 di superficie. (Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino, vol. XLVIII).

Postumo

58 - Traduzione e rifacimento per l'edizione francese dell'Enciclopédie des sciences mathématiques dell'articolo " Méthodes énumeratives (Abzählende Methoden) " di H. G. Zeuthen.

Trattati

59 - Geometria di posizione di G. C. C. v. Staudt; traduzione dal tedesco a cura del dott. M. Pieri, preceduta da uno studio del prof. C. Segre sulla vita e le opere del v. Staudt. - Torino, Bocca, 1889.

60 - Lezioni di geometria projettiva nella R. Acc. Militare di Torino (Torino, 1891); e vari corsi litografati di lezioni di geometria projettiva e di geometria descrittiva nelle R. Università di Catania e di Parma.

Digitized by Google

Logica matematica.

A. N. WHITEHEAD and B. RUSSEL, *Principia Mathematica*. Vol. I, Cambridge, University Press, 1910, pag. 666; Vol. II, 1912, pag. 772.

(*Continuazione, v. p. 53*).

Auctores introduce signo ⁝ de Formul. pag. 79, sub forma de sagitta ascendente:

35·04 $\quad a, b \in \text{Cls}. \supset . a \fallingdotseq b = (x ; y) \ni (x \in a. y \in b)$

id es, $a \fallingdotseq b$ repræsenta omni dyade, de que primo elemento es uno a, et secundo elemento es uno b.

Tunc « relatione inter objectos de classe a et objectos de classe b » vale « classe de $a \fallingdotseq b$ ».

35·21 $\quad a, b \in \text{Cls}. r \in \text{Rel}. \supset . (a \fallingdotseq \text{V}) \frown r \frown (\text{V} \fallingdotseq b) = (a \fallingdotseq b) \frown r$

ut resulta ex propositiones de prof. Padoa, publicato in 1900, et reimpresso in Formul. t. 5, pag. 79.

In modo simile:

35·31 $\quad r \frown (\text{V} \fallingdotseq a) \frown (\text{V} \fallingdotseq b) = r \frown (\text{V} \fallingdotseq a \frown b)$

35·354 $\quad [r \frown (\text{V} \fallingdotseq a)] \times s = r \times [(a \fallingdotseq \text{V}) \frown s]$

35·412 $\quad (\text{V} \fallingdotseq a) \frown (\text{V} \fallingdotseq b) = (\text{V} \fallingdotseq a \frown b)$

35·52 $\quad \text{C}`(a \fallingdotseq b) = b \fallingdotseq a$

35·85 $\quad \exists a . \exists b . \supset . \text{E}_1`(a \fallingdotseq b) = a . \text{E}_2`(a \fallingdotseq b) = b$

36·25 $\quad a \in \text{Cls}. r \in \text{Rel}. r \frown (a \fallingdotseq a) = r. \supset . r \in \text{Cls}'(a \fallingdotseq a)$

N. 37 considera relatione que resulta per eliminatione de y ex propositiones

$$x ; y \in r. y \in a.$$

In præsente recensione, me indica resultatu per $x \in r \times a$.

37·01 $\quad r \in \text{Rel}. a \in \text{Cls}. \supset . r \times a = \hat{x} \ni [\exists a \frown \hat{y} \ni (x ; y \in r)]$ Def.

$r, s \in \text{Rel}. a, b \in \text{Cls}. \supset$:

37·33 $\quad (r \times s) \times a = r \times (s \times a)$

37·401 $\quad r \times a = \text{E}_1`[r \frown (\text{V} \fallingdotseq a)]$

37·412 $\quad [r \frown (\text{V} \fallingdotseq a)] \times b = r \times (a \frown b)$

Digitized by Google

37·2 $\quad a \supset b . \supset . r \times a \supset r \times b$

37·22 $\quad r \times (a \smile b) = r \times a \smile r \times b$

37·32 $\quad \mathrm{E}_1 \text{`} (r \times s) = r \times \mathrm{E}_1 \text{`} s$

Si $r \varepsilon$ Rel, et si $y \varepsilon \mathrm{E}_2 \text{`} r$, tunc $r \times \iota y$ repræsenta « referentes de y in relatione r »:

$$r \varepsilon \text{ Rel} . y \varepsilon \mathrm{E}_2 \text{`} r . \supset . r \times \iota y = x \ni [x ; y \varepsilon r]$$

Nunc, si nos scribe $r\,y$ in loco de $r \times \iota y$, nos identifica relatione r, ad functione r que ad omni y in classe $\mathrm{E}_2 \text{`} r$ fac corresponde uno classe de $\mathrm{E}_1 \text{`} r$; id es, cum notationes de *Formulario*, t. V, pag. 80:

$$r \varepsilon (\mathrm{Cls}' \mathrm{E}_1 \text{`} r) \mathrm{F} (\mathrm{E}_2 \text{`} r)$$

Tunc formulas præcedente pote es scripto sub novo forma:

37·01 $\quad a, b \varepsilon \mathrm{Cls} . r \varepsilon (\mathrm{Cls}' b) \mathrm{F}\, a . \supset . r \times a = x \ni \exists\, a \frown y \ni (x \varepsilon r\, y)$ Def.

Signo $\times$ de præsente recensione coincide cum sagitta descendente in « Introduction au Formulaire » 1894, pag. 41. Expressione $x \times a$, cum tres elemento, debe es decomposito in $(r \times) a$, et non $r (\times a)$. Expressione $r \times a$ vale $\mathrm{U}\, r \text{`} a$ de Formulario, t. 5, pag. 77.

Si in 37·01, in loco de a me scribe ιy, ubi $y \varepsilon a$, resulta $r \times \iota y = r\, y$, quod justifica identificatione præcedente.

Auctores introduce symbolo Cls^2, cum valore « classe de classes »:

60·03 $\quad \mathrm{Cls}^2 = \mathrm{Cls}' \mathrm{Cls}$

et, secundo *Formulario*, tomo V, pag. 82, sed cum forma pauco differente, illos pone:

40·01 $\quad k \varepsilon \mathrm{Cls}^2 . \supset . \prod k = x \ni (y \varepsilon k . \supset_y . x \varepsilon y)$ Def.

40·02 $\quad$ » $\quad \mathrm{U}\, k = x \ni \exists\, k \frown y \ni (x \varepsilon y)$ Def.

« Si k es classe de classes, tunc $\prod k$, producto logico de k, indica omni objecto x, pertinente ad omni classe y de k, et $\mathrm{U}\, k$, summa de k, indica omni objecto x, pertinente ad ullo classe y de k ». Per exemplo, si k es fasce de rectas, id es classe de rectas jacente in idem plano, et que transi per idem puncto, $\prod k$ es isto puncto, et $\mathrm{U}\, k$ es illo plano.

Digitized by Google

40·16 $k, l \varepsilon \mathrm{Cls}^2 . k \circ l . \circ . \cap l \circ \cap k . \mathrm{U}\, k \circ \mathrm{U}\, l$

40·171 $\mathrm{U}\, k \smile \mathrm{U}\, l = \mathrm{U}\,(k \smile l)$

40·18 $\cap (k \smile l) = \cap k \frown \cap l$

et plure alio, debito ad prof. Burali-Forti, et collecto in Formulario, t. 5, pag. 82.

N. 42 da plure novo et notabile proprietate de summa et producto logico :

42·1 $k \varepsilon \mathrm{Cls'}\ \mathrm{Cls'}\ \mathrm{Cls} . \circ .\ \mathrm{U}\,(\mathrm{U}\, y \mid y \text{ ` } k) = \mathrm{U}\,(\mathrm{U}\, k)$

42·11 $\cap (\cap y \mid y \text{ ` } k) = \cap (\mathrm{U}\, k)$

et in modo plus breve : $\mathrm{U}\,(\mathrm{U} \text{ ` } k) = \mathrm{U}\,(\mathrm{U}\, k) . \cap (\cap \text{ ` } k) = \cap (\mathrm{U}\, k)$.

Per exemplo, si a et b es punctos, nos indica per $a\, b$ segmento de recta inter a et b (aut semirecta, aut recta, si lectore præfer). Illo es classe de punctos.

Tunc si a, b, c es punctos, $(a\, x) \mid x \text{ ` } b\, c$ indica systema, aut fasce, de radios $a\, x$, ubi $x$ es puncto de $b\, c$. Ergo $(a\, x) \mid x \text{ ` } b\, c$ es classe de classe de punctos, id es classe de radios, aut fasce de radios, et

$$\mathrm{U}\,[(a\, x \mid x \text{ ` } (b\, c)] = \text{ triangulo } a\, b\, c.$$

considerato ut loco de punctos.

Si a, b, c, d es quatuor puncto, vertices de tetrahedro,

$$[(a\, x) \mid x \text{ ` } b\, y\,] \mid y \text{ ` } (c\, d)$$

es classe de classe de classe de punctos, id es systema de fasces de radios que ab a projecta omni puncto de $b\, y$, ubi y es puncto de segmento $c\, d$.

$$\{\mathrm{U}[(a\, x) \mid x \text{ ` } (b\, y)]\} \mid y \text{ ` } (c\, d) = (a\, b\, y) \mid y \text{ ` } (c\, d) =$$

systema de triangulos $a\, b\, c$, ubi y describe segmento $c\, d$.

$$\mathrm{U}\{[(a\, x) \mid x \text{ ` } (b\, y)] \mid y \text{ ` } (c\, d)\} = a\, x \mid x \text{ ` } (b\, c\, d) =$$

systema (stella) de radios que ab a projecta punctos de triangulo $b\, c\, d$. Nunc si nos opera per U super fasce de triangulos, aut super stella de radios, nos semper obtine tetrahedro $a\, b\, c\, d$. Vide Mathematische Annalen, t. 37, pag. 194.

Auctores reproduce et demonstra plure propositione de Formulario. Inter propositiones novo, me cita :

51·221 $a \varepsilon \mathrm{Cls} . x \varepsilon a . \circ . a = (a \backsim \iota\, x) \smile \iota\, x$

51·23 $\iota\, x = \iota\, y . = . x = y$

Digitized by Google

Et da rationes de necessitate de symbolos ι et $\imath$, deficiente in symbolismo incompleto de Boole et de Schröder.

53·22 $\quad a \in \text{Cls.} \supset \text{U}(\iota`a) = a$

54·21 $\quad \iota x \smile \iota y = \iota x \smile \iota z \,.\, \supset .\, y = z$

55·13 $\quad z\,;w = x\,;y \,.=.\, z = x \,.\, w = y$

55·232 $\quad a, b \in \text{Cls.} \supset : \exists\,(\iota x \,!\, a) \frown (\iota y \,!\, b) \,.=.\, x = y \,.\, \exists\, a \frown b$

60·362 $\quad \text{Cls}'(\iota x) = \iota \Lambda \smile \iota\iota x$

60·5 $\quad a \in \text{Cls.} \supset \text{U}(\text{Cls}'a) = a$

N. 63 stude proprietates de relatione ε.

Formulario, pag. 75, considera identitate " idem ", quem in præsente relatione, me indica per signo ω. Ergo $\omega x = x$, pro omni x. Et si a es classe, $x \in a$ vale $x \in \omega a$.

50·16 $\quad \iota \times = \omega$

62·3 $\quad k \in \text{Cls}' \text{Cls.} \supset . \omega \times k = \text{U}\,k$

" Signo U, summa de classes, vale ω-ullo ", aut $\omega \times = \text{U}$.

N. 71 tracta de relationes r que ad omni elemento in $\text{E}_2`r$ fac corresponde uno solo elemento in $\text{E}_1`r$; id es de functiones ad uno valore.

71·25 $\quad a, b, c \in \text{Cls.} f \in a \text{ F } b \,.\, g \in b \text{ F } c \,.\, \supset . f g \in a \text{ F } c$

71·252 $\quad a, b, c \in \text{Cls.} f \in (a \text{ F } b) \text{ rcp.} g \in (b \text{ F } c) \text{ rcp.} \supset . f g \in (a \text{ F } c) \text{ rcp}$

concordante cum Formulario, pag. 78, P. 4·7.

72·241 $\quad u \in \text{Functio simile.} \supset . (u^{-1})^{-1} = u$

N. 73 tracta de classes simile, vel de numero æquale; isto numero es in generale, infinito:

$$a, b \in \text{Cls.} \supset : \text{Num}\,a = \text{Num}\,b \,.=.\, \exists\,(b \text{ F } a) \text{ rcp}$$

Auctores demonstra proprietates reflexivo, symmetrico et transitivo de relatione $\text{Num}\,a = \text{Num}\,b$, quod da jure ad nos de scribe illo sub forma de æqualitate.

73·3 $\quad \text{Num}\,a = \text{Num}\,a \qquad \text{dem.} \qquad (\iota x \mid x, a) \in (a \text{ F } a) \text{ rcp}$

" Num a æqua Num a; nam relatione ιx ubi varia x, in campo a, es corrispondentia reciproco inter a et a ".

Pag. 363 incipe tractatione de numeros cardinale. Auctores elimina definitiones per abstractione. In plure casu, mathematicos introduce novo ente $\varphi`x$, non per definitione de forma

$$\varphi`x = \text{expressione composito per } x \text{ et symbolos noto,}$$

Digitized by Google

sed defini solo æqualitate :

$\varphi x = \varphi y . =$. relatione $p_{x,y}$ composito per x, y et elementos noto.

Auctores proba que definitione per abstractione pote es reducto ad definitiones nominale ; suffice de pone

$$\varphi x = y \ni (p_{x,y}).$$

Per exemplo, definitione de numero cardinale, in Formul. t. 5, pag. 135 es dato per abstractione:

$a, b \in \text{Cls}. \supset : \text{Num}\, a = \text{Num}\, b . =. \exists (b \text{ F } a)$ reciproco Def.

« Si a et b es classes, nos dice que numero de a æqua numero de b, si existe correspondentia univoco et reciproco inter a et b ». Nos non defini Num a, sed solo relatione $\text{Num}\, a = \text{Num}\, b$.

Auctores transforma definitione præcedente in nominale, sub forma :

$$a \in \text{Cls}. \supset. \text{Num}\, a = \text{Cls} \frown b \ni [\exists (b \text{ F } a) \text{ recipr.}]$$

« Si a es classe, Num a indica classe de classes b, que ès in correspondentia uno-uno cum a ».

In præsente recensione, me seque methodo de Formulario.

Auctores defini numero 1 :

52·16 $a \in \text{Cls}. \supset .\therefore \text{Num}\, a = 1 . =: \exists a : x, y \in a. \supset_{x,y} . x = y$

Symbolo 1 de Auctores vale symbolo Elem de prof. Padoa (vide suo opusculo sopra citato), et symbolo Un de prof. Burali-Forti.

Es digno de nota propositiones novo sequentes :

53·01 $a \in \text{Cls}. \supset. \cap \iota a = a$

53·1 $a, b \in \text{Cls}. \supset. \cap (\iota a \smile \iota b) = a \frown b$

54·14 $a \in \text{Cls}. k \in \text{Cls'}\ \text{Cls}. \supset. \cap (k \smile \iota a) = (\cap k) \frown a$

N. 50 introduce symbolo de relatione *æquale ;* si nos confunde $r \times \iota y$ cum y, ut supra nos explica, nos pote confunde relatione *æquale* cum symbolo ι de Formulario, et introducto ab Auctores in N. 51.

50·16 $a \in \text{Cls}. \supset. \iota \times a = a$

50·4 $r \in \text{Rel}. \supset. r \times \iota = \iota \times r = r$

73·31 $\text{Num}\, a = \text{Num}\, b. \supset. \text{Num}\, b = \text{Num}\, a$

Vale propositione : $f \in (b \text{ F } a)$ rcp. $\supset. f^{-1} \in (a \text{ F } b)$ rcp

73·32 $\text{Num}\, a = \text{Num}\, b. \text{Num}\, b = \text{Num}\, c. \supset. \text{Num}\, a = \text{Num}\, c$

Digitized by Google

Vale propositione 71·252, supra scripto.

73·41 $\quad a \in \text{Cls} . \supset . \text{Num}\, \iota' a = \text{Num}\, a$

« Classe a es tam numeroso ut classe de classes $\iota' a$ ».

73·71 $a, b, c, d \in \text{Cls} . \text{Num}\, a = \text{Num}\, b . \text{Num}\, c = \text{Num}\, d . a \frown c = \Lambda . b \frown d = \Lambda . \supset . \text{Num}\,(a \smile c) = \text{Num}\,(b \smile d)$.

73·88 $a, b, c \in \text{Cls} . a \supset b \supset c . \text{Num}\, a = \text{Num}\, c . \supset . \text{Num}\, b = \text{Num}\, c$

es celebre theorema enuntiato ab Cantor, et demonstrato ab Schröder, Bernstein, Zermelo, etc. Vide « Revista de Mathematica » t. 8, 1902-06, pag. 136. In demonstratione commune, occurre idea de numero naturale. Sed theorema es de logica, et non de arithmetica; ergo suo demonstratione debe es independente ab idea de numero, et in modo speciale, debe es independente ab principio de inductione; quod es facto ab plure auctore.

N. 80 tracta de selectione de individuos arbitrario in systema de classes. Plure auctore jam dice: « Si k es systema de classes, tunc in omni classe a de systema k, me selige uno elemento arbitrario x ».

Sed hodie es noto que non lice selige numero infinito de entes arbitrario (Vide p. es. Revista de mathematica, t. 8 pag. 145). Isto selectione depende ab principio vocato « axioma multiplicativo ». Auctores da numeroso expressione æquivalente de isto principio, sed non demonstratione.

Selectione de elementos in k pote es definito ut seque:

$$k \in \text{Cls'}\, \text{Cls} . \supset . \text{Select}\, k = (\text{U}\, k \,\text{F}\, k) \frown f \ni (a \in k . \supset . f a \in a)$$

Tunc forma plus simplice de axioma multiplicativo es:

88·37 $\quad k \in \text{Cls'}\, \text{Cls} . \Lambda \sim \epsilon k . \supset . \exists\, \text{Select}\, k$

Si f es functione ad uno valore, et x es valore variabile, tunc in analysi, $f^2 x, f^3 x$ indica $f f x, f f f x$, functiones iterato. Si f es functione cum plure valore, nos pote considera serie de classes $f x$, $f \times f x, f \times f \times f x$, etc. Auctores defini successione de classes, que resulta ab operatione repetito, sine introductione de numeros naturale, nam nos es in logica, non in arithmetica. Principio de inductione, que in arithmetica es postulato, nunc es posito in definitione.

90·01 $\quad r \in \text{Rel} . \text{E}_1' r \supset \text{E}_2' r . \supset . \therefore x ; y \in \text{Potestate}\, r . = : y \in \text{E}_2' r : m \in \text{Cls} . r \times m \supset m . y \in m . \supset_m . x \in m$

Digitized by Google

" Si r es relatione, aut classe de dyades, et classe de primo elementos de r es contento in classe de secundo elementos, tunc nos dice quod dyade $x\,;y$ habe inter se relatione que es potestate de r, si y es uno ex secundo elementos de r; et si nos sume ad arbitrio uno classe m, tale que $r \times m$ es parte de m, et que contine y, illo classe m contine x ".

Studio de potestates de uno relatione, aut de producto $r \times s$ de duo relatione, et de casus quando relatione es univoco, aut biunivoco, duce ad theoremas elegante et interessante, que continua usque ad termino de primo volumen.

Volumen secundo tracta de numeros cardinale, finito aut infinito, de operationes super illos, de series, et de limites de functiones. Et me spera de pote loque de illo inter pauco tempore.

G. PEANO.

Geometria analitico-projettiva.

Dott. C. BURALI-FORTI, *Corso di Geometria Analitico-Proiettiva per gli allievi della R. Accademia Militare.* Torino, G. B. Petrini, 1912, 8° pag. VII + 267 (Prezzo L. 7.50; legato in tutta tela L. 8).

Benchè si tratti, com'è precisato nel titolo, di un testo scolastico, è certamenente opportuno richiamare su di esso, con qualche precisione, l'attenzione dei cultori tutti delle scienze matematiche, perchè ben si eleva e si differenzia da un ordinario esperimento di fusione (quale si potrebbe pensare) della Geometria Analitica con la Geometria Proiettiva.

Eccoci intanto uno sprazzo luminoso offerto dall'A. (p. V-VI) sul contenuto: " Approfittando dell'ordinamento triennale del " l'Accademia, si son potuti *riunire* in un solo corso di Geo- " metria i vari argomenti fondamentali che prima erano spar- " pagliati nei corsi di *Geometria analitica*, di *Proiettiva*, di *Cal- " colo infinitesimale*, di *Geometria descrittiva*. Il vantaggio di tale " ordinamento è duplice: con minimi mezzi si raggiunge il mas- " simo effetto (legge fisica naturale che non sempre si vuol " seguire!): si dà già fatta una *sintesi* che lo studente non sempre " è in grado di fare *sommando* quanto gli è stato insegnato da " ben quattro cattedre diverse e sotto aspetti diversi ".

Digitized by Google

Va con questo subito rilevato che nel libro in esame vien fatto uso sistematico del *Calcolo Geometrico* generale del Grassmann, sotto la forma elementare ed intrinseca a cui è stato ridotto dal Prof. G. Peano, e con facile metodo didattico il quale attesta la felice elaborazione, eseguita dall'A., per sempre meglio soddisfare alle esigenze dell'insegnamento. In tal modo partendo dalle più semplici proprietà della geometria elementare, e con algoritmo affatto simile a quello noto dell'Algebra, si opera direttamente sugli enti punto, retta, piano, con precise operazioni geometriche; si studiano con unico procedimento, e con eguale facilità, tanto le proprietà metriche quanto quelle proiettive, sia quelle sotto forma finita, sia quelle infinitesimali.

Ciò perchè il calcolo geometrico di cui ci occupiamo è affatto libero da coordinate, che potrebbero essere completamente ignorate, e conduce a risultati *intrinseci* od *assoluti* dei quali si può sempre dare l'immediata interpretazione geometrica. Però ogni sistema di coordinate, senza eccezioni, può dedursi dal calcolo geometrico assoluto, il quale, come precisa l'A. nella prefazione: « è pronto a darle, e di qualsiasi specie, ogniqualvolta gli vengano richieste »; nelle formole basta esprimere gli enti che vi compariscono per mezzo delle coordinate desiderate per ottenere le formole corrispondenti nelle coordinate indicate.

Il cap. I. di « Nozioni fondamentali » si apre coll'introduzione delle *formazioni geometriche di 1ª, 2ª, 3ª e 4ª specie del Grassmann* (F_1, F_2, F_3, F_4), mettendo in evidenza la loro estensione sui concetti di punto, retta, piano,; definendone geometricamente l'eguaglianza l'annullamento, nonchè la somma, il prodotto per un numero ed il *prodotto alternato progressivo*, del quale ultimo si rilevano le differenze fondamentali col prodotto algebrico.

Come particolare F_1 (differenza di due punti) vien introdotto il *vettore*, concetto non solo fondamentale per il calcolo delle direzioni, ma che, astraendo dalle formazioni di specie superiore, può essere assunto quale base, com'è noto, di quel calcolo vettoriale che già si è dimostrato tanto fecondo nella trattazione di importanti questioni geometriche e fisico-meccaniche. Seguono i bivettori, rappresentanti delle giaciture, le operazioni su di essi e sui vettori, con le condizioni di parallelismo e complanarità. Definiti i trivettori e l'operatore | « *indice* », se ne traggono le condizioni spaziali di perpendicolarità e la definizione

Digitized by Google

del prodotto interno di due vettori, per il quale è adottata la notazione primitiva ($\times$) del Grassmann, e ne è indicato il significato geometrico e meccanico. Quali applicazioni si ottengono le formole per le distanze, angoli, aree e volumi. Vien poi introdotta la rotazione dei vettori nel piano sia di un angolo retto (operatore i) sia di φ radianti $(e^{i\varphi})$. ben rilevando le analogie e le differenze dei « numeri complessi operatori » con i numeri complessi algebrici. Eseguita l'estensione alle formazioni geometriche del concetto di funzione di uno o più numeri, di limite di derivata e di integrale, si dà pure la nozione (così importante nel calcolo vettoriale) del *gradiente* per il numero funzione di un punto.

Infine s'introducono i principali sistemi di coordinate del piano e dello spazio, indicando anche come si possano trasformare in essi i risultati ottenuti, avendo già prima definite le coordinate per i vettori e bivettori; tutto ciò specialmente per comodità dello studioso a cui siano famigliari tali sistemi, poichè, come osserva l'A. (p. 45): « potendosi operare direttamente sugli enti geometrici retta, piano, è del tutto inutile far uso delle loro equazioni; anzi la trattazione algebrica con le coordinate complica quasi sempre notevolmente i calcoli e fa perdere di vista i fatti geometrici ».

Nel cap. II, dedicato alle *linee piane e gobbe*, viene viemmeglio messa in evidenza, praticamente, la semplicità e la fecondità del metodo Grassmanniano. Concepita la linea come luogo di un punto funzione di una variabile ne vengono dedotte in modo affatto naturale, incominciando dalle linee piane, l'espressioni della tangente e della normale, la definizione e la classificazione dei punti singolari e della concavità; la ricerca dei punti all'infinito e la determinazione in essi degli assintoti, per due distinte vie semplici e rigorose. Si trovano parimenti l'espressioni dell'arco della curvatura, del punto generico dell'evoluta cioè del centro di curvatura, del quale ultimo è esposta una nota elegante costruzione grafica; ed infine l'espressione del punto delle evolventi della linea considerata. Delle esposte generalità vien fatta una estesa applicazione alle linee piane più notevoli, specialmente dal punto di vista fisico-meccanico, è cioè: alle cicloidi ed ipocicloidi, podarie ed antipodarie, coniche, sinusoide, trattrice, catenaria e logaritmica; spirale d'Archimede, iperbolica e logaritmica; cissoidi, concoidi, ovali di Cartesio e di Cassini.

Digitized by Google

Per le linee gobbe viene similmene definita la retta tangente, il piano osculatore, con un cenno ai punti singolari; l'arco, il triedro principale ed i tre vettori T, N, B paralleli alle direzioni dei suoi spigoli (tangente, normale e binormale); si trovano poi le *formole di Frenet* con l'introduzione della curvatura e della torsione, e si definiscono le indicatrici sferiche. Supposto il punto della linea funzione di un parametro arbitrario, si ricavano le espressioni per le curvature e per i vettori T, N, B con procedimento così elegante e rapido da poter ben esesre indicato quale esempio luminoso (fra gli altri numerosissimi) della semplicità del calcolo geometrico. Del resto, certo per la complicazione che s'incontra nei calcoli analoghi con le coordinate cartesiane, le formule di Frenet, con qualche altro argomento di questo trattato, non sono generalmente sviluppati che nei corsi superiori di geometria differenziale. Della linea considerata si trova ancora il centro della sfera osculatrice (o spigolo di regresso della sviluppabile polare), quello del cerchio osculatore, le evolventi e le evolute. Di tutto è fatta applicazione all'*elica* generale nello studio delle sue proprietà caratteristiche, delle relazioni di essa con la sezione del cilindro che la contiene, considerando in particolare l'elica circolare.

Il cap. III s'inizia con le generalità sulle superficie, riguardate come luogo di un punto funzione di due variabili, esprimendone il piano tangente e la normale.

Definito poi il *sistema* ∞^1 *di linee* ed indicati i varii modi d'individuarlo, se ne considera l'*inviluppo*, per la cui ricerca vengono esposti i principali metodi pratici, sempre illustrati da esempi opportunamente scelti (astroide, caustiche, ecc). Lo stesso vien fatto nell'esposizione dei principali quattro metodi indicati per la ricerca delle *traettorie ortogonali;* fra essi è specialmente da notare per l'eleganza sua il metodo dei gradienti, com'è ben posta in luce dagli esempi addotti (ellissi ed iperboli omofocali, circonferenze d'Apollonio, ecc).

Procedendo poscia allo studio delle *rigate* se ne indica, oltre alla nota generazione geometrica mediante tre direttrici, la generazione geometrico-analitica mediante un punto ed un vettore funzioni di una stessa variabile; si trova il piano tangente in un punto, il piano assintotico relativo ad una generatrice, il cono (o piano) direttore. Definite le rigate sviluppabili e fissata la relativa condizione caratteristica, con la classificazione che ne con-

Digitized by Google

segue, se ne determina (quando esiste) lo spigolo di regresso, e se ne effettua in ogni caso in modo semplice e rigoroso lo sviluppo in un piano, dimostrando anche il teorema di Catalan. Per le rigate gobbe si trova il punto di contatto d'un piano qualunque passante per una generatrice, il piano e punto centrale, e si dimostra il teorema di Chasles.

Vengono poi trattate le *superficie di rotazione*, considerando in particolare le quadriche rotonde, il toro e la sfera, e sopra queste ultime la lossodromia, la finestra di Viviani, ecc. Infine si considerano le *superficie elicoidali* per la cui rappresentazione analitica basta ricorrere alla individuazione del moto elicoidale di un punto; e son studiate le varie specie di elicoidi rigati, la colonna torsa, la vite di S.t Gilles ed il serpentino.

Nel cap. IV destinato alla *Proiettività* viene bandito l'uso sistematico del metodo sintetico, didatticamente molto pesante ed ingombrante quando ne siano svolti rigorosamente i principî; e quindi si adopera solamente tale metodo quando abbia su quello analitico il vantaggio della brevità. Indicate perciò le definizioni degli enti proiettivi punto, retta e piano, se ne fissa la rappresentazione analitica come « posizioni » rispettivamente delle formazioni non nulle $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ (ad invariante nullo), $\mathbf{F}_3$ di Grassmann, assegnando le formule per le intersezioni nello spazio e nel piano (proprio o no) con l'introduzione dei *prodotti alternati regressivi*. Risulta qui opportuna l'esposizione delle proprietà generali del prodotto alternato (sia progressivo che regressivo), dalle quali emergono le leggi di dualità per le **F**, da cui seguono il principio di dualità per lo spazio e per il piano; come applicazione è dimostrato il teorema dei triangoli omologici. Proseguendo in simil modo, alle definizioni dei fasci di punti, di rette, di piani (sono le ordinarie forme geometriche fondamentali di prima specie), si fa tosto seguire la rappresentazione analitica di un elemento del fascio di **F** mediante una coppia fissata nel fascio stesso; introducendo poi i birapporti e le successioni armoniche, con le relative costruzioni e proprietà.

Le omografie (o proiettività) fra due fasci di figure proiettive vengono introdotte come " posizioni delle trasformazioni lineari " nei fasci di **F**, per le quali si premettono naturalmente le necessarie brevi nozioni. Ne segue facilmente il teorema fondamentale della proiettività, la proprietà caratteristica di questa relativa ai birapporti; come pure che le operazioni di proiezione e sezione,

Digitized by Google

ed i moti geometrici applicati a figure proiettive di prima specie conducono a proiettività; ed ancora che il prodotto di due o più proiettività è una proiettività. Viene inoltre dedotta la costruzione della proiettività fra due fasci complanari distinti con l'asse o centro di collineazione, introducendo i punti limiti, e considerando in particolare la similitudine e la prospettività. Per la costruzione della proiettività fra due fasci sovvraposti s'introducono le trasformazioni di Steiner sulla circonferenza, dimostrando la relazione loro con le proiettività; in tal guisa, con la costruzione di Steiner e degli elementi uniti, si dà subito il miglior metodo geometrico per la risoluzione dei problemi di 2° grado.

Similmente si procede per l'involuzione in una figura proiettiva, facendo seguire ai teoremi fondamentali l'involuzione di Steiner sulla circonferenza, con le relative costruzioni. Si considerano, in particolare, in un fascio di rette la coppia di raggi ortogonali d'una data involuzione e l'involuzione circolare; per l'involuzione in una retta propria si ricavano le varie note costruzioni metriche, con la considerazione del centro dell'involuzione e proprietà relative.

Nel cap. V, destinato alle *coniche e quadriche*, vengono definite le coniche (secondo Steiner) coi fasci omografici complanari; si procede così alle costruzioni per punti e tangenti, al problema dell'intersezione con una retta col suo duale, alla classificazione delle coniche, illustrando il tutto mediante casi speciali notevoli. Seguono i teoremi di Pascal e Brianchon con tutti i loro casi particolari.

Vengono poi esposte rapidamente le proprietà essenziali della teoria della polarità, definendo come polare di un punto rispetto ad una conica l'asse dell'involuzione di Steiner, sulla conica, che ha per centro quel punto; ciò dopo aver, naturalmente esteso alle coniche le nozioni e proprietà sulla trasformazione di Steiner prima considerata per la circonferenza. Si ha così modo di trattare del centro, dei diametri, dell'involuzione dei diametri coniugati, degli assi e degli estremi dei diametri; di fissare le varie equazioni ridotte delle coniche e risolvere i problemi pratici più importanti che al riguardo si possono presentare. È esposta, fra le altre, la costruzione di Chasles per trovar la posizione e la grandezza degli assi di una ellisse, di cui si conoscono due diametri coniugati con i loro estremi.

Digitized by Google

Fissate poscia le proprietà fondamentali per i fuochi e le direttrici, se ne traggono le relative proprietà metriche classiche trattando pure alcuni problemi pratici. Segue la considerazione dell'equazione generale cartesiana di una conica, con la classificazione che da essa si deduce, e si indica il modo pratico per la costruzione di una conica così individuata per ognuno dei tre tipi ellitico, iperbolico, parabolico: trovando anche l'equazione degli asintoti e degli assi.

Infine vengono brevemente trattate le quadriche con la loro definizione nel sistema cartesiano, esponendo poi la generazione delle quadriche proprie (non degeneri) delle quali si considera anche l'intersezione col piano all'infinito. Si studiano in particolare le quadriche rigate proprie, considerando poi quelle relative alle generatrici di una rigata gobba (paraboloide delle normali e paraboloide delle tangenti), ed è espresso il punto generico della quadrica individuata da due rette sghembe proiettive.

La breve appendice, con le formole vettoriali generali per il calcolo di aree e volumi, può servir di complemento a quei corsi di analisi infinitesimale in cui non si faccia cenno di tali formule.

Concludendo, nella trattazione ultimamente considerata per le coniche e quadriche si cercheranno invano sia le sottili disquisizioni sintetiche, sia la ingombrante (per quanto elegante) teoria delle forme quadratiche con i relativi invarianti; bagaglio ritenuto doveroso in tutte le moderne trattazioni analitico proiettive delle omografie e luoghi di 2° grado. Le delusioni che così potranno provare gl'intransigenti seguaci dello Staudt, ed i formalisti ad ogni costo, credo saranno più che compensate dalla soddisfazione di coloro che badano essenzialmente a ricavare tutti i risultati più importanti per la via rigorosa più breve. Nè si potrà tacciare l'A. di aver proceduto con gretti criteri di esclusivo utilitarismo, poichè anche i più restii ai nuovi metodi non possono misconoscere l'eleganza del Calcolo Geometrico.

M. Bottasso.

Meccanica.

G. Hamel, *Elementare Mechanik*. 8°, p. XVIII, 634 Leipzig B. G. Teubner, 1912. (Prezzo Mk. 16, leg. 18).

§ 1. — Notabile sotto vari rispetti è questo libro del chiar. Prof. G. Hamel. In tempi in cui i trattati di meccanica abbon-

Digitized by Google

dano, il pubblicarne uno nuovo, che non abbia una parentela troppo stretta con gli altri, non è facile impresa. Ma il prof. Hamel ha ritoccata e riordinata quella classica materia secondo idee proprie, con profonda dottrina di scienziato e bell'arte d'insegnante. Ed è riuscito sovente originale nel porre e illustrare i principî; chiaro ed elegante nella trattazione analitica o sintetica dei singoli problemi; istruttivo negli esercizii e nelle applicazioni, e suggestivo sempre. Che se taluno non approverà del tutto, come io non approvo, le idee dell' A. riguardo al contenuto dei principî della meccanica e al modo di esporli, riconoscerà tuttavia che un libro che fa pensare e discutere possiede per ciò solo la più pregevole qualità didattica.

Secondo le dichiarazioni dell' A. stesso nella prefazione, le parti più originali o più notabili del libro sono:

1) L'introduzione del concetto di forza come *una forma delle nostre conoscenze naturali*, e non come una real cosa, o una causa del moto, o una parola per denominare il prodotto della massa per l'accerazione;

2) La separazione dei concetti di forza e causa e la definizione di quest' ultima;

3). La sostituzione della meccanica dell' elemento materiale non isolato a quella del punto materiale, la quale non si può più ragionevolmente adottare nel secolo della vittoriosa teoria molecolare e atomica della materia;

4). La considerazione costante di soli corpi a contatto, e non di curve e superficie vincolanti un punto, che sono astrazioni inutili;

5). La distinzione fra *eingeprägten und Reaktionskräften;* che è indispensabile, benchè a prima vista possa parere una peregrina finezza; e la definizione delle forze di reazione;

6). L' introduzione della teoria dell' equazioni integrali nello studio delle vibrazioni, e dei fondamenti della termodinamica nella meccanica dei fluidi.

Riguardo alle innovazioni indicate nei n. 3) 4) e 6) non credo che occorra dir di più; forse non ci sarà chi tosto non le lodi o non vi consenta. Ma riguardo alle rimanenti si richiede per apprezzarle una più minuta illustrazione del pensiero dell' autore.

§ 2. — Postulati l'esistenza d'uno spazio e d'un tempo assoluto, come concetti ausiliari indispensabili, indi esposti ed illustrati in sette paragrafi i fondamenti della cinematica, l'A. passa

Digitized by Google

nei rimanenti paragrafi del primo capitolo ai concetti di massa, forza e causa, che introduce nel modo che segue.

Un filo metallico avvolto in forma elicoidale è sospeso verticalmente ad una delle sue estremità; l'altra essendo libera di muoversi sotto l'azione d'un peso. Il quale spostato dalla sua posizione d'equilibrio, oscilla lungo la verticale, e può con una sua punta segnare le sue oscillazioni sopra una carta affumicata avvolta in un cilindro uniformemente ruotante intorno a un asse verticale. Idealizzando il fenomeno, si trova che le oscillazioni sono rappresentabili con un'equazione del tipo

$$x = a \operatorname{sen} (\lambda t + \varepsilon).$$

Variando a piacere l'esperienza col medesimo apparecchio, si riconosce che λ è una *costante caratteristica*. Essa sola entra nell'espressione dell'accelerazione: $j = \lambda^2 x$. Variando invece l'apparecchio (peso e filo) varia il λ e si trova $\lambda^2 = \frac{\pi}{m}$; ove π dipende solo dal filo, m solo dal corpo (peso). Questo coefficiente m, caratteristico del corpo, si chiama *la massa* del corpo. Si deduce quindi

$$m j = - \pi x.$$

Il primo membro è una *Massenbeschleunigung;* il secondo membro rappresenta la sua legge di variazione. Questa legge comune a tutta una data classe di movimenti si chiama una *una forza.* In sostanza *forza* è una parola per denotare una *Massenbeschleunigung.* Per esempio, conformemente all'esperienze di Galileo sulla caduta dei gravi si trova $mj = mg$; per cui mg è la legge di variazione della " Massenbeschleunigung „ relativa a un corpo cadente; ossia è una *forza*, e precisamente la cosidetta forza di gravità. In generale, quando per una data classe di fenomeni di moto si sia trovata una " Ausdruck für die Massenbeschleunigung „ (o dimostratane l'esistenza), si chiamerà « diesen Ausdruck, eine Kraft ».

Quest'è, in breve, la definizione a cui perviene l'A. Il quale se ne dimostra tosto poco soddisfatto perchè soggiunge: " zweifellos ist diese Definition der Kraft in hohem grade konventionel „. Tuttavia egli l'adotta in luogo della definizione del Kirchhoff, che ritiene viziosa, perchè non fa altro che introdurre una nuova parola per denotare la « Massenbeschleunigung ».

Digitized by Google

In verità io resto molto in dubbio se sia stato il Kirchhoff, o se sia ora l'Hamel che abbia introdotta una nuova parola (la Massenbeschleunigung). Ma, a parte questo, a me pare che la definizione dell'Hamel sia non solo convenzionale (il che non poteva non essere, giacchè l'A. ammette a priori che la forza « kein Ding ist »), ma imprecisa e artificiosa. Oltre a che rimane molto in ombra il passaggio dalla forza così concepita al concetto e alla rappresentazione di essa quale grandezza vettoriale; malgrado l'introduzione, che l'A. fa a mezza via, del concetto di pressione nella maniera classica.

Ed artificiosa, per non parlar d'altro, apparisce anche la distinzione tra forza e causa, che l'A. definisce come quell'insieme delle grandezze di natura fisica, chimica, o geometrica (costanti o variabili da cui dipende la forza (ossia la " Massenbeschleunigung-gesetz "). In conclusione, pur riconoscendo che queste idee dell'A. contengono qualche cosa di molto suggestivo, è mia opinione ch'egli non abbia mantenuta la promessa fatta nella prefazione " die anerkannten Schwierigkeiten, welche der sogenannte Mechanik bieht, zu überwinden und nicht zu umgehen ".

§ 3. — La distinzione fra " eingeprägten Kräften " und " Reactionskärften " comparisce la prima volta nel libro quando l'A. parla dell'attrito; ed è là dove egli illustra meglio cotesta distinzione.

Quando due corpi sono a contatto e in equilibrio, sugli elementi superficiali che si toccano si esercita una pressione del tutto incognita, la quale può considerarsi come la risultante di due forze: la pressione normale e la " Hafreibung " (attrito che si oppone allo strisciamento). Quando avviene moto, la " Haftreibung " è sostituita dalla " Gleitreibung " (attrito di strisciamento), la quale risulta determinata dall'esperienza. Questa è una " eingeprägte Kraft "; l'altra una forza di reazione, come la pressione normale. E in generale sono " eingeprägten Kräfte " la forza di gravità, la forza d'attrazione Newtoniana, le forze elettriche, le resistenze dei mezzi, ecc., che l'esperienza permette di determinare inte ramente. In sostanza le " eingeprägten Kräften " sono le forze attive, o le forze agenti; tutte forze conosciute o determinabili (prescindendo dalle difficoltà pratiche) (1). Le forze di reazione

(1) La traduzione letterale « forze impresse » ha significato troppo ristretto in italiano; per tradurre insieme alla parola anche il pensiero dell'A. bisogna dire, a parer mio, « forze attive ».

Digitized by Google

invece sono quelle che appaiono causate unicamente dalla costituzione cinematica del sistema materiale. La loro grandezza e direzione sono a priori del tutto sconosciute; e esse hanno, per così dire, un " passiven Kharacter „. La " Haftreibung „ per esempio, può assumere, entro certi limiti, ogni grandezza e direzione; e talvolta può opporsi al moto, tal'altra facilitarlo o determinarlo (permette, per es., il rotolamento d'una ruota).

Cotesta distinzione delle forze in forze attive e in forze di reazione, sulla quale l' A. ritorna più volte nel corso del libro e le conseguenti definizioni, si trovano, più o meno esplicitamente, in quasi tutti i trattati di meccanica; e però non presentano quel carattere di novità che egli vi attribuisce

Riguardo all'ordinamento della materia è da notare che l'A. non s'attiene alla classica divisione della meccanica in cinematica, statica e dinamica. Queste parti sono mischiate; e in un medesimo capitolo si trova un paragrafo che sviluppa una questione di cinematica e una di dinamica; per es., dopo il capitolo che sviluppa i principi fondamentali della dinamica segue la cinematica dei corpi rigidi. Ma preoccupazione costante dell'A. è di salire dai casi particolari alle questioni generali, e di illustrare i principî e i teoremi con numerose applicazioni, tratte specialmente dalla meccanica tecnica. Per esempio, riguardo ai giroscopî, ne studia le più recenti applicazioni. E sempre nell'intento di stringere vieppiù i vincoli fra la teoria e la pratica dedica un capitolo alla statica grafica, un'altro alle macchine semplici; e non dimentica mai di indicare, ove è possibile, quelle soluzioni sintetiche e grafiche che sono utili nella pratica.

La bibliografia poi è per ogni argomento molto accurata; non completa, che sarebbe pregio inopportuno di un libro di scuola, ma limitata alle opere fondamentali; e illustrata con qualche nota, che spiega l'importanza e l'ordine storico delle varie citazioni.

Se, come dice l'A. « es gibt nur eine Mechanik, die kann man im Grunde genommen aus jedem guten Buche lernen „, questo è certamente un libro ove la meccanica s' impara bene.

P. Burgatti

Geometria descrittiva.

G. Loria. — *Metodi di Geometria Descrittiva.* — Milano, Hoepli 1909. (Prezzo L. 3). *Poliedri, Curve e Superficie secondo i metodi*

Digitized by Google

della Geometria Descrittiva. — Milano, Hoepli 1912. (Prezzo L. 3).

Sono due dei manuali Hoepli, che si completano a vicenda, e tali che conviene parlarne insieme.

Esponiamo prima di tutto il contenuto dei due volumi.

Nei primi tre libri del 1° volume l'A. espone quanto riguarda i tre metodi della doppia proiezione ortogonale, della proiezione centrale, dei piani quotati, e per ciascuno di essi sviluppa i problemi e le costruzioni fondamentali.

Più brevemente viene svolta poi l'assonometria, sì ortogonale che obliqua e prospettiva, ed infine il libro è chiuso da due capitoli sulla fotogrammetria teorica. Non starò a dire più in particolare sulla materia contenuta nei primi 4 libri, che, come è ben naturale, in fondo è quella che si trova in tutti i buoni libri di geometria descrit tiva (1): invece accennerò a quella dei capitoli sulla fotogrammetria, che costituiscono una novità rispetto agli altri manuali italiani del genere. Si tratta di non molte pagine, 26, ma che bastano a dare un' idea delle varie questioni connesse all'argomento e a risolverle nei casi più semplici. Il primo capitolo, esposto quali siano i due problemi fondamentali della fotogrammetria e dati alcuni lemmi di geom. proiettiva necessarii per la trattazione, risolve la 1ª questione cioè " date due proiezioni di una figura da due centri dati sopra due piani dati, trovarne la proiezione da un terzo centro dato sopra un altro piano pure dato „ : al caso generale seguono alcuni casi particolari, che sono richiesti più soventemente nelle applicazioni. Il secondo capitolo espone quanto si può dire intorno ad una figura di cui sien date una, due o tre proiezioni da centri ignoti, e senza dimostrarle enuncia anche le proprietà, che si devono verificare nel caso che sien 4 le proiezioni date.

Il 2° volume è il complemento e l'applicazione del primo. La prima parte parla della risoluzione dell'angolo triedro, della rappresentazione dei poliedri, e della risoluzione dei varii problemi su di essi. La 2ª parte tratta dei problemi sulle curve piane e gobbe,

(1) Le innovazioni di concetto e di metodo nella risoluzione di alcuni problemi erano già state esposte dall'A. in precedenti pubblicazioni fatte nell'*Archiv. f. Mathem. u. Phys.* e nel *Periodico di matematica per l'insegnamento secondario.*

Digitized by Google

soffermandosi specialmente sull'elica del cilindro circolare retto. La 3ª è dedicata alle superficie ed ai problemi su di esse: in particolare vengono considerate con diffusione le superficie di rotazione, gli elicoidi, le superficie coniche e cilindriche, le rigate sviluppabili e quelle gobbe, e di queste ultime più in particolare le assoidi e le pseudo-assoidi. Tanto alla teoria delle curve come a quella delle superficie precede un breve cenno, in cui l'A. richiama, senza pretender di dimostrarle, le principali proprietà delle une e delle altre.

Venendo ad esporre il mio modesto parere, avrei desiderato, che l'A. nel 1° volume avesse almeno accennato alla soluzione dei più semplici problemi anche nel metodo assonometrico, e avesse sviluppato sia pur limitatamente la prospettiva nella sua esecuzione pratica. Nel 2° volume avrei desiderato la risoluzione di qualche problema di teoria delle ombre, teoria a cui viene accennato un po' troppo fugacemente, e qualche cosa di più sulle quadriche.

Ma di fronte a ciò, devo dire che io mi son meravigliato, come l'A. sia riuscito a far entrare tante cose in un numero relativamente ristretto di pagine. E tutto vi è trattato con precisione e rigore di linguaggio, con una chiarezza massima, e nello stesso tempo con sobrietà; del resto l'A. è troppo ben conosciuto, perchè io debba insistere. La disposizione della materia e la scelta della soluzione dei problemi sono veramente lodevoli, ed io ho cercato invano qualche appunto da muovere in proposito.

Due cose ancora debbo rilevare, che ho viste con piacere. Intanto l'A. limita il meno possibile la scelta dei dati, dando così di molti problemi soluzioni più generali delle solite, eppure non meno semplici. In ogni problema distingue poi tutti i casi di eccezione alla costruzione indicata: non posso che approvare, perchè la cosa è molto istruttiva, e perchè aiuta chi legge ad impadronirsi a fondo dei varii metodi, ma mi pare che sarebbe stata anche più istruttiva se l'A. avesse mostrato, ciò che non sempre ha fatto, come oltre quelli indicati non ci sono altri casi d' eccezione.

Concludendo i due libretti pur nel loro modesto aspetto son veramente degni del loro egregio autore.

S. Medici

Digitized by Google

Pubblicazioni recenti sulla Storia delle Matematiche.

A. Favaro, *Amici e corrispondenti di Galileo Galilei.* — XXIX. *Vincenzio Viviani.* — Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti T. LXXII, 1912-13.

Questo nuovo elemento della ottima raccolta di memorie destinate ad illustrare tutte le persone che ebbero relazioni con Galileo supera per estensione ed importanza tutti i precedenti; è un volume di meglio che 150 pagine, adorno del ritratto dell'ultimo discepolo del sommo scienziato, nel quale è narrata in base a documenti autentici la vita di lui, sono indicate le sue relazioni con la famiglia Galilei, i tentativi fatti per collocarlo sopra la cattedra di Padova, ne sono analizzati i lavori editi ed inediti e vengono descritti i magnanimi sforzi da lui fatti per ottenere venisse fatta un'edizione veramente completa delle opere del sommo fisico. In appendice si trova l'Elenco di tutti i Manoscritti del Viviani, esistenti nella Collezione galileliana della Biblioteca Nazionale di Firenze, e l'analogo elenco dei suoi corrispondenti, quale si desume dal suo carteggio tuttora esistente. Finendo l'A. osserva a ragione: " se il disegno delle Edizioni Nazionali..., verrà proseguito, e dopo la pubblicazione delle opere del Maestro si penserà pure a quelle degli scolari non dubitiamo che molte e preziose cose si troveranno nei troppo negletti manoscritti di Vincenzo Viviani „. Per conto nostro aggiungiamo che chi si accingerà a soddisfare il giusto desiderio implicitamente contenente in queste parole, attingerà aiuti preziosi e consigli eccellenti in questa nuova pubblicazione dell'instancabile illustratore del secolo di Galileo.

A Favaro, *Intorno agli Atti della Nazione Germanica nello Studio di Padova ed alla scissura tra giuristi ed artistt.* Atti del R. Istituto Veneto T. LXX; 1912-13.

È un saggio tratto da una grande opera destinata ad illustrare la storia dell' Università Padovana, che l'A. ha architettata e che uscirà per cura della R. Deputazione di storia patria per le provincie Venete; l'A. ne espone il piano, indicando le materie destiuate ai dodici volumi che la comporranno.

Digitized by Google

A. Favaro, *Serie ventesimaseconda di Scampoli Galileliani.* Atti e Memorie della R. Accademia di Padova, T. XXIX, 1912.

Contiene: CXXXIX: Ancora sulla cosiddetta « Lampada di Galileo „ nel Duomo di Pisa. CXXXIX: Galileo Galilei e Giovanni Cinelli. CXL: Ancora a proposito dell'« Eppur si muove „. CXLI: A proposito del dito indice di Galilei. CXLII: Dall'Archivio Venturi in Reggio d'Emilia. CXLIII, Per una nuova edizione delle Opere di Galileo. CXLIV: Aggiunte e correzioni all'Indice Biografico.

A. Favaro, *Galileo Galilei e Cristiano Huygens. Nuovi documenti sull'applicazione del pendolo all'orologio.* Rivista Fisica, Matematica e Scienze naturali, T. XIII, 1912.

F. Amodeo e S. Cola. *La riabilitazione del matematico napoletano Annibale Giordano.* Atti dell'Accademia Pontaniana, Vol. XLII, 1912.

Sopra Annibale Giordano, il diletto discepolo di Nicola Fergola, da tempo gravava l'accusa di tradimento lanciata contro di lui dal Colletta; ora da alcune recenti pubblicazioni gli autori desumono la prova dell'infondatezza di tale accusa; e traggono occasione da ciò per presentare una nuova biografia del noto geometra di Ottajano.

F. Amodeo, *Il valore matematico degli Arabi e dei Mori intorno al Millenio.* — Atti dell'Accademia Pontaniana, T. XLII, 1911.

G. Celoria, *Commemorazione dell'astronomo Barnaba Oriani.* Letta il 12 Novembre 1911 nel Salone-Teatro S. Clemente in Sesto S. Giovanni. Sesto S. Giovanni, editore Pigna.

Con profondità ed eloquenza sono qui esposte con mano maestra le benemerenze, come uomo e come cittadino, del grande astronomo (n. 19 Luglio 1752, m. 12 Novembre 1832). L'opuscolo è ornato della fotografia di un busto dell'Oriani e si chiude con la riproduzione delle epigrafi murate a Garegnano (sua patria), a Milano ed a Sesto S. Giovanni.

Digitized by Google

Notizie.

Un trattato d'aritmetica in polacco. L'accademia delle Scienze di Cracovia ha testè dato alle stampe l'*Arytmetyca teorityczna* di S. Zaremba. Non si tratta di un semplice libro scolastico modellato sopra i precedenti, ma il frutto delle meditazioni dell'egregio autore sopra i fondamenti dell'aritmetica. Pei molti dei nostri lettori a cui è ignota la lingua polacca segnaliamo un resoconto in francese che della sua opera fece l'autore presentando il suo volume a quell'Accademia il 4 novembre 1912 (Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, Novembre 1912), nel quale sono lucidamente esposte e giustificate le innovazioni proposte.

Per commemorare l'invenzione dei logaritmi si è costituito ad Edinburgo un comitato avente per còmpito di ricordare al mondo che nel 1914 compiono tre secoli dalla pubblicazione della celebre opera *Mirifici logarithmorum canonis descriptio.* Siamo certi che a tale festa si associeranno, non soltanto i matematici puri, ma anche astronomi, navigatori, ingegneri, in una parola tutti coloro che traggono quotidiano vantaggio dalla geniale invenzione di Lord Napier.

Un ellissografo giapponese si trova chiaramente descritto nella nota *The Ellipsograph of Hazama Garobei* letta da D. Kikuchi il 12 Novembre 1912 all'Accademia imperiale di Tokyo e pubblicato nel vol. I degli *Atti* relativi. Dell'inventore, che visse dal 1756 al 1816, sono ivi raccolti i principali dati biografici; dello strumento sono indicate le vicissitudini in base ad un manoscritto esistente negli archivi di quel sodalizio e ne è dato anche un disegno. La proprietà dell'ellisse (curva che gli antichi giapponesi riguardavano sempre come sezione piana del cilindro) sfruttata è ben nota in Europa, essendo contenuto nel teorema: Se si descrivono due circonferenze aventi per diametri gli assi AA′ e BB′ di un'ellisse e se una retta condotta per il comune centro taglia quelle due circonferenze in due punti P, Q; le parallele condotte da essi agli assi si tagliano in un punto della curva. Hazama trasforma questa proposizione e così raggiunge lo scopo mediante un sistema di ruote dentate, su cui richiamiamo l'attenzione dei costruttori di modelli matematici.

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE
ANNO XV, Fasc. III: Ottobre, Novembre e Dicembre 1913

SUL NOME « ALGORITMO »

Nota di ETTORE BORTOLOTTI

Nelle *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik von* M. CANTOR. Vol. I (1907) pag. 714, si legge:

« Die Schrift beginnt mit den Worten: — Gesprochen hat « Algoritmi. Lasst uns Gott verdientes Lob sagen, unserem « Führer und Verteidiger — Der Name des Verfassers Alchwa- « rizmi ist also hier in Algoritmi übergegangen, únd fast in « dieser letzeren Form nur noch etwas weniger der Urform « gleichend, nähmlich als *Algorithmus* hat das Wort Jahrhun- « derte überdauert und bezeichnet jetz jedes wirderkehrende « zur Regel gewordene Rechnungsverfahren ».

Ed, in un una nota a piè di pagina, si soggiunge:

« In dem Algorithmus den Namen Alchwarizmi erkannt zu « haben, ist das grosse Verdienst von Reinaud (Mémoire sur « l' Inde pag. 303 seg.), der schon 1845 diesen Gedanken aus- « sprach, also lange bevor die Entdeckung des Cambridger Kodex « die Vermutung in Gewissheit verwandelte ».

Il medesimo si afferma nella *Encyclopédie des Sciences Mathématiques* (Tome I, volume I, Fascicolo I, pag. 19).

Peraltro è da notare che alla pag. 186 del libro: (1).

Storia delle scienze matematiche in Italia — di Guglielmo Libri — Versione di Luigi Masieri — Dottore in Fisica e Matematica

(1) Possiedo un esemplare, rilegato con le prime 240 pagine del Tomo II, e proveniente della Biblioteca Boncompagni. Ha l'indicazione di catalogo aa, III, 23.

Digitized by Google

— Tomo Primo — Milano — Tipografia e Libreria Pirotta e C. Contrada di Santa Brigida, N. 964. *1842*, in 8° di pp. 240 (le prime cinque non numerate) si legge:

NOTA XII.

(pag. 103)

« Perchè si possa confrontare il testo di Mohamed ben Musa « pubblicato da Rosen, con le antiche traduzioni latine che tro- « vansi fra i manoscritti della biblioteca del re (Supplèment « latin, n.° 49, f. 110. — MSS. latins, n.° 7377 A. — Résidu « Saint-Germain, recueil de physique, astronomie et géométrie, « pag. II, n.° 7, in fol.), pubblichiam qui con la versione a fronte « la parte dell' opera del geometra arabo contenuta nei suoi ma- « noscritti ».

« Liber Maumeti filii Moysi « alchoarismi de algebra et al- « muchabala incipit ».

Comincia il Libro di Maometto figlio di Mosè sull' alguritmo per l' algebra e per l' almacabala.

Da cui si vede che la traduzione di *Alchoarismi* od *Alchicarismi* in algoritmo, era stata fatta e pubblicata anche prima del 1845; e scema lo stupore per la *divinazione di Reinaud.*

Opere complete e Enciclopedie.

Obras sobre Mathematica do Dr. F. Gomes Teixeira, Director da Academia Polytechnica do Porto, antigo Professor na Universidade de Coimbra, etc. Publicadas par ordem do Governo Português. Vol. II e III. Coimbra, 1906.

Alcuni anni or sono in questo *Bollettino* (Anno VIII, 1905, pp. 25-26) abbiamo dato una breve notizia del primo volume delle *Obras sobre Mathematica* dell' illustre matematico portoghese F. G. Teixeira. La pubblicazione, fatta per ordine e a spese del governo, non ostante i gravi rivolgimenti politici della nazione consorella, si è continuata regolarmente e dal 1906 al 1909 videro la luce i volumi 2° fino al 5°; la stampa degli ultimi due volumi, 6° e 7°, è già a buon punto.

Digitized by Google

I volumi 4° e 5° contengono forse l' opera maggiore del TEIXEIRA, cioè il *Traité des courbes speciales remarquables planes et gauches*. Lasciando a persona d' indiscussa autorità e competenza il compito di riferire su questa opera del TEIXEIRA, mi accingo ora a dare un breve cenno dei volumi 2° e 3°.

Il volume secondo, pubblicato nel 1906, contiene buona parte delle memorie scientifiche dell' A. (43 tra note, memorie brevi e voluminose), e sono divise (senza ordine di data) in 14 sezioni; 10 di queste concernono quistioni di analisi; 3, quistioni di geometria analitica, una finalmente riguarda l' uso delle coordinate oblique nella Meccanica Analitica.

Dote precipua degli scritti e delle memorie del TEIXEIRA è la eleganza della esposizione, la cura minuziosa dei particolari; sicchè i suoi lavori (molti dei quali pubblicati nei nostri maggiori periodici) si leggono con interesse e con profitto, anche se essi trattino questioni da tempo risolute; chè il dotto portoghese trova sempre modo di aggiungere qualche interessante osservazione, qualche proprietà non ancora osservata. Ne fanno fede sopratutto i brevi articoli (comparsi in origine come estratti di lettere ad HERMITE) sulla interpolazione, sulla riduzione degli integrali ellittici, sui numeri di Bernoulli, ecc.

Le memorie più notevoli di questo secondo volume sono: la monografia sulle equazioni alle derivate parziali del 2° ordine, lavoro giovanile composto nel 1875, e presentato all' Università di Coimbra come tesi di laurea; monografia che, tenuto conto dell' epoca in cui fu scritta è certamente degna di nota; e poi la memoria sulla serie di Lagrange e le sue applicazioni, presentata all' Accademia del Belgio nel 1904. L' A. si è più volte occupato della quistione (1881 e 1889, *Obras* t. I, p. 227) ed ha assegnato una formula, più generale di quella di Lagrange, per sviluppare in serie secondo le potenze di x una funzione u definita da

$$u = \varphi(y)$$
$$y = t + x\varphi_1(y) + \ldots\ldots + x^n \varphi_n(y);$$

e ne ha anche date le condizioni per la convergenza uniforme.

Nella nuova memoria, riottenuti per via più semplice e diretta i risultati antecedentemente conseguiti, l'A. ne fa applicazione alla teoria delle funzioni algebriche: e precisamente, supposto che tra x ed y abbia luogo la relazione algebrica $f(x, y) = 0$,

Digitized by Google

egli ottiene lo sviluppo di quel ramo y che per $x=x_1$ prende il valore y_1, in una serie convergente entro un cerchio col centro in x_1 e nella ipotesi che y_1 sia radice semplice o multipla di $f(x_1, y)=0$. Molto interessanti sono alcuni casi particolari e le formule per il calcolo dei coefficienti dello sviluppo della serie.

Citiamo ancora la memoria: *Sur un problème de Gauss*, sulle cosidette somme di Gauss e sulla funzione *aleph* di Wronski, vera miniera di identità nuove e curiose, di cui l'A. sagacemente si vale per lo sviluppo in serie delle funzioni razionali; e quella: *Sur quelques applications des séries ordonnées suivant les puissances du sinus* (stampata nel 1906 nel volume 131 del *Journal für die reine und angewandte Mathem.*). L'argomento costituì già oggetto delle ricerche dell'A. (*Obras*, t. I. p. 103); nel nuovo lavoro egli è condotto ad altre numerose relazioni tra i numeri di Euler e di Bernoulli.

Tra le memorie di geometria notiamo quella molto elegante sulle cubiche e sulle quartiche bicircolari, in cui l'A. determina i centri d'inversione rispetto ai quali la curva è trasformata di se stessa; l'applicazione del teorema di Fagnano alla lumaca di Pascal ed alla sinusoide; ecc.

*
* *

Il 3° volume delle *Obras* contiene la ristampa del *Curso de Analyse infinitesimal* e precisamente del calcolo differenziale (il calcolo integrale sarà stampato nel volume 6°).

La nuova ristampa di tale opera, la cui terza edizione apparve nel 1896, è alquanto più estesa delle precedenti edizioni: ma il piano generale e lo sviluppo delle varie parti è rimasto del tutto identico. L'A. ha aggiunto però numerose e succose note storiche.

Seguendo un uso accettato da molti trattatisti, l'A. premette al *Curso* una introduzione, composta di due capitoli, in cui, con saggia parsimonia, sono svolte la teoria dei numeri reali e immaginari, le nozioni fondamentali della teoria dei limiti, delle serie semplici e doppie, dei prodotti infiniti e delle frazioni continue. Esposti quindi i principii generali della teoria delle funzioni (secondo Weierstrass), si dedica il secondo capitolo allo studio di speciali funzioni e cioè delle funzioni intere, esponenziali, logaritmiche, circolari. Tale introduzione occupa circa un terzo del volume.

Digitized by Google

Il Calcolo differenziale è esposto in otto capitoli. Molto saviamente l' A., dopo aver trattato alcuni dei problemi classici che condussero specialmente i grandi matematici del secolo XVII alla scoperta del calcolo differenziale, non raccoglie in un' unica parte del corso le applicazioni geometriche; ma esposte le regole fondamentali di derivazione, ne fa (Cap. III) applicazione alle tangenti e alle normali delle curve piane o gobbe e delle superficie; alle questioni della concavità e convessità; alla ricerca degli asintoti; alla curvatura, ecc. È appunto alternando le applicazioni alla teoria che si può riescire efficaci, e si può rendere varia e facile anche la materia più arida.

Un capitolo, il 5°, è dedicato alla serie di Taylor e alle sue applicazioni analitiche; e il seguente alle applicazioni geometriche (contatto di due curve, punti di flesso, multipli, singolari; curve nelle spazio, ecc.).

I due ultimi capitoli riguardano invece teorie che, di regola, non appartengono ad un corso elementare di calcolo.

Infatti, il breve cap. 7° tratta delle funzioni definite mediante serie e delle loro singolarità; del principio della condensazione delle singolarità; e l' ultimo delle funzioni di variabile complessa. L' A. studia alcune delle più notevoli funzioni intere; le funzioni uniformi in una data regione del piano o in tutto il piano; e dimostra i teoremi classici di Weierstrass e di Mittag-Leffler.

Il libro è scritto con invidiabile chiarezza o con giusto rigore. L' A. non ama complicare le sue dimostrazioni imponendo alle funzioni considerate condizioni molto generali; a volta anche sorvola su qualche dimostrazione difficile (su cui poi ritorna nel seguito) cercando anzitutto che il lettore afferri l' oggetto essenziale del teorema.

Abbondano le applicazioni, scelte sempre con cura con criterio ammirabile. L' A., notiamolo con piacere e con orgoglio, è studioso dei nostri matematici; e cita e mette numerose volte a profitto i libri del Capelli, del Cesàro e del Dini.

Un corso notevole adunque da più punti di vista e che merita di essere conosciuto e studiato.

R. Marcolongo.

Digitized by Google

Fisica Matematica.

V. VOLTERRA, *Lectures delivered at the celebration of the twentietk anniversary of the fundation of Clark University under the auspices of the Departement of Physics.* Worcester, Mass, September 7-II, 1909. Published by Clark University, 8°, p. 82.

Il piano ed il contenuto di queste conferenze sono noti ai nostri lettori (v. *Bollettino*, T. XII, 1910, p. 61-2), onde non è il caso che noi entriamo oggi in molti particolari al riguardo. Ci basti rilevare come esse ci si presentano sotto veste francese, quantunque il titolo riferito potrebbe far pensare diversamente. Sono redatte in forma assai concisa, ma intelligibile per chi non sia digiuno della materia; le esatte citazioni che le illustrano danno il mezzo di procurarsi le ulteriori notizie necessarie per approfondire la conoscenza della materia e permettono di farsi un' idea chiara del filo che collega le molteplici e disparatissime pubblicazioni dell' illustre autore e de' suoi seguaci o discepoli. Nè va taciato che il volume in discorso contiene anche bellissime figure che spiegano le esperienze che vennero fatte per confermare i nuovi importanti risultati che l' A. notoriamente ha ottenuti nella teoria dell' elasticità.

G. L.

Le celle delle api.

H. VOGT, *Geometrie ünd Oekonomie der Bienenzelle.* Breslau, 1911.

Come zoologo son lieto di segnalare ai lettori del *Bollettino* questa memoria che può interessare tanto i matematici, quanto i cultori delle scienze biologiche (1). Ogni celletta di ape,

(1) L' interesse dei matematici per la quistione studiata nel lavoro del prof. Vogt risale alla più remota antichità e si può dire abbia continuato senz' interruzione sino ad oggi. Ciò è provato dalla letteratura relativa all'argomento la quale comincia con la prefazione scritta da Pappo Alessandrino nel IV Sec. dell' E. v. al V Libro della sua celebre *Collezione matematica* ed ha come ultimi elementi a noi noti due lavori di H. Hennesey (*On the geometrical construction of the cell of the honey-bee*: Proceedings of the R. Society of London, T. 38 e 40; 1885 e 1886), dai quali si trae un procedimento pratico per costruire modelli in cartone delle celle delle api; alcuni di tali modelli si trovano esposti nella Sezione scientifica del South Kensington Museum di Londra.
[G. L.]

Digitized by Google

separatamente osservata, ha forma di prisma esagonale, aperto ad una delle estremità e chiuso, alla estremità opposta, da tre facce romboidali convergenti in una piramide. Il favo dell' ape è composto di un gran numero di tali cellette, disposte col loro asse principale in senso orrizzontale ed ordinate in due strati, in modo che le piramidi basali, in ciascuna celletta di uno strato, s' incastrano nei vani che intercedono fra le piramidi basali di due cellette contigue appartenenti allo strato opposto.

Intorno alla forma ed alla interpretazione di una cosifatta architettura domina da oltre due secoli, pressochè incontrastata, una teoria che porta i nomi di Keplero (1619) e dell' astronomo Maraldi (1712).

In base a questa teoria si ammette:

I. Che la piramide di fondo non presenti altro angolo piano se non quello del rombododecaedro di 109° 28' e il relativo supplemento 70° 32', nè altro angolo diedro se non quello di 120°.

II. Che nella costruzione delle cellette non soltanto si consegua il massimo di spazio utile col minimo di superficie, ma anche il minimo consumo di materiale. Ciò presuppone, naturalmente, che lo spessore della cera sia uniforme in tutte le pareti e che ogni spigolo sia rappresentato da una linea geometrica.

L'Autore ha eseguito una ricca serie di misurazioni mercè una tecnica accurata (misure dirette e di modelli in gesso con micrometri, goniometri ecc.), ed ha ottenuto risultati discordanti dalle idee suesposte, il cui lungo ed ingiustificato favore va attribuito, secondo lui, a preconcetti teleologici dai quali anche i più spregiudicati fra i moderni osservatori non giungono a liberarsi, ed alla complessità dell' argomento che esigerebbe, per essere indagato a fondo, il concorso simultaneo della matematica e della biologia.

*
* *

Per quanto concerne il tipo geometrico della celletta, le prime conclusioni ricavate dall' Autore si riferiscono alle dimensioni dei prismi esagonali: i lati e gli angoli di tali prismi, sebbene non uguali in modo assoluto, come pretendevano alcuni autori antichi, oscillano intorno ad un valore medio, rappresentato dal prisma esagonale regolare.

Digitized by Google

Per contro gli angoli compresi tra le facce del prisma e le facce trapezoidali (angoli d' inclinazione) nonchè quelli compresi tra due di queste facce contigue presentano oscillazioni assai più ampie e risultano in media minori di quanto ammette la teoria Keplero-Maraldi; i minimi se ne discostano notevolmente tantochè alcuni angoli ottusi delle facce cadono sino a 97° 6; l' angolo ammesso dalla teoria di Keplero-Maraldi si trova nemmeno in un $^1/_3$ degli angoli diedri misurati e nemmeno in $^1/_6$ degli angoli d' inclinazione; v' ha motivo di credere che i due autori abbiano dedotto i valori dal calcolo anzichè da misure dirette.

*
* *

Per ciò che si riferisce al consumo di materiale, l' Autore osserva anzitutto come le pareti siano ben lungi dal possedere spessore uniforme; si notano infatti rinforzi a tutti gli spigoli e le pareti basali, così nelle cellette da operaie come in quelle da fuchi, sono di regola più spesse delle pareti prismatiche. Il calcolo delle misure ottenute dimostra che una piramide ideale, corrispondente al minimo consumo di cera, dovrebbe avere una forma notevolmente più ottusa di quella fabbricata in realtà dalle api, nondimeno il risparmio di cera che le api potrebbero fare qualora sostituissero alla piramide abituale quella più economica suggerita dal calcolo, risulterebbe assai tenue (da $\frac{1}{148}$ a $\frac{1}{120}$ della celletta). Occorre poi ricordare che il risparmio in tal modo conseguito è insignificante di fronte ad irregolarità di varia natura che compariscono nella costruzione dell' alveare; fra le quali è degna di nota quella derivante dalla incurvatura di due pareti opposte del prisma esagonale.

*
* *

Criticata così le teoria di Keplero-Maraldi, l'Autore discute l' opera delle api nei riguardi della solidità di costruzione. Contrariamente alle conclusioni di Wyman (1868) egli trova che stiramenti riferibili all' azione della gravità si rendono sensibili nelle cellette occupate; non però in quelle vuote. Inoltre, mentre i testi continuano a ripetere, come verità incontestata, che la costruzione delle api corrisponde ad un massimo di solidità, non

Digitized by Google

v' ha di fatto nessuno che abbia dimostrato scientificamente l'asserto; anzi è probabile che un favo nel quale i fondi delle cellette fossero piani e si corrispondessero nei due strati (divise in tal modo da una parete piana) offrirebbe maggiore solidità della forma caratteristica poc' anzi discussa.

Passando finalmente ad indagare il problema dal punto di vista psicofisico, l' Autore esamina le diverse idee che corrono in proposito. Non trova accettabili quelle che fan tutto dipendere da tendenze teologiche della Natura, ne le altre che vorrebbero attribuire alle api un ingegno matematico. D' altronde una spiegazione puramente meccanica (sistema di cellette esagonali derivate da mutua compressione di cellette sferiche) non apparisce degna di seria considerazione, quando si ponga mente alla tecnica seguita dalle api nella fabbrica, e soppratutto quando si consideri che altri imenotteri della stessa famiglia costruiscono cellule prismatiche isolate anzichè riunite a favo.

L' autore si ottiene quindi ad una interpretazione filogenetico-geometrica: non esclude che il punto di partenza per la formazione dell' aggregato esagonale possa ricercarsi nella compressione di cellette sferiche, ma ad ogni modo l' angolo di 120° è diventato istintivo per l' insetto; questo, in qualunque circostanza, tende ad innalzare le sue costruzioni sotto l' angolo ereditariamente fissato. Dato un tale istinto, la necessità di ricolmare i vuoti rimasti alla base dei prismi con facce piane rende possibile una solo figura geometrica; il rombododecaedro, ciò indipendentemente dall' ordine attuale con cui la costruzione procede.

Le oscillazioni intorno ai valori teorici dipendono da fattori d' ambiente e dalle attitudini dell' ape, e l' ampiezza di tali oscilazioni ci dà una misura della sensibilità differenziale (1) di questi animali per rispetto agli angoli. È degno di nota il fatto che la sensibilità differenziale per gli angoli dei prismi è doppia di

(1) Le api cioè percepirebbero la differenza che intercede tra due angoli di piramide soltanto quando è almeno doppia di quella che intercede tra due angoli di prisma. Il concetto di « sensibilità differenziale » è molto importante in psicofisica e si spiega in poche parole: perchè si produca una sensazione è necessario un *minimum* d' intensità nello stimolo (soglia dello stimolo). Un dato stimolo dev' esser poi modificato di un certo *minimum* (soglia differenziale) perchè si traduca in una differenza di sensazione *sensibilità differenziale* è appunto l' attitudine a percepire differenze nella intensità di uno stimolo esterno; differenze di stimoli tattili determinati da angoli di diversa grandezza.

Digitized by Google

quella che si verifica per gli angoli delle piramidi, ed è interessante dal punto di vista della psicologia comparata un raffronto suggerito all'autore da alcune esperienze del Loeb. Questo biologo osservò che tre persone, condotte in ambiente oscuro, ed invitate a toccar colla mano l'estremità di un filo alla quale era attaccato un peso, dopo aver toccato la estremità opposta commettevano errori rispettivi di 0°-3°, 1°-5°, 3°-7° se il filo era verticale, mentre gli errori salivano rispettivamente a 4°-10°, 3°-10°, 1°-10° se il filo faceva un angolo di 45° colla verticale. Il riconoscimento degli angoli per mezzo del tatto si verifica adunque in maniera analoga nelle persone e nelle api. Qui mi permetterei una osservazione: l'apparato visivo tanto sviluppato dell'ape non avrà alcuna parte nella sua etologia? I due grandi occhi composti che stanno ai lati del capo e quei tre occhi semplici disegnanti un triangolo in fronte saranno estranei alle sue attitudini geometriche?

L'Autore ammette che le api lavorino col metodo dell'« errore medio » secondo Fechner, e lo deduce sopratutto dal fatto che le cellette dei fuchi sono costituite con errori più forti dal punto di vista delle loro dimensioni assolute; con errori più lievi per quanto concerne la regolarità delle loro parti.

RAFFAELE ISSEL.

Equazioni differenziali.

F. HORN, *Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen* (Sammlung Schubert LX). Leipzig, Göschen, 1910: 8° p. VII + 363 (Prezzo Mk. 10).

Questo volume fa seguito agli altri due che portano i nnmeri XIII e L della stessa raccolta, e che trattano delle equazioni differenziali ordinarie (L. SCHLESINGER, *Einführung in die Theorie der Differentialgleichunge mit einer unabhängigen Variabeln*, Leipzig, Göschen, 1900; F. HORN, *Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung*, Leipzig, Göschen, 1905; vedi *Boll.*, T. IV, 1901, p. 112-114, T. IX, 1906, p. 120). Esso contiene una esposizione chiara ed ordinata della teoria delle equazioni a derivate parziali del 1° e del 2° ordine con due variabili indipendenti (fatta eccezione per il primo capitolo, in cui si considerano equazioni con n variabili), corredata da opportuni esempi e da numerose

Digitized by Google

indicazioni bibliografiche; nella prima parte (C. 1-3) si suppongono le variabili complesse e le funzioni analitiche, nella seconda (C. 4-8) si suppongono le variabili reali, e le funzioni pure reali e soggette a certe condizioni di continuità e di derivabilità.

Ecco ora in breve il contenuto dei singoli capitoli.

C. 1 (p. 1-35). Equazioni lineari del 1° ordine con n variabili indipendenti: teorema d'esistenza, equazioni omogenee e non omogenee, sistemi completi.

C. 2 (p. 36-91). Equazioni del 1° ordine di forma qualunque con due variabili indipendenti: teorema d'esistenza, superficie integrali e caratteristiche, metodi d'integrazione, varie specie d'integrali.

C. 3 (p. 92-152). Equazioni del 2° ordine: esistenza degli integrali, superficie integrali e caratteristiche, equazioni di Monge-Ampere, metodo di Laplace.

C. 4 (p. 153-187). Equazioni lineari del 2° ordine del tipo iperbolico: teorema di Green, dimostrazione dell'esistenza degli integrali col metodo delle approssimazioni successive, metodo di integrazione di Riemann.

C. 5 (p. 188-238). Equazioni integrali di Fredholm.

C. 6 (p. 239-277). Problema dei valori al contorno per le equazioni lineari ordinarie del 2° ordine: funzione di Green d'una espressione differenziale del 2° ordine, equazione aggiunta, applicazione della teoria delle equazioni integrali.

C. 7 (p. 278-332). Problema dei valori al contorno per le equazioni lineari a derivate parziali del 2° ordine del tipo ellittico: equazione di Laplace e potenziale logaritmico, soluzione del problema di Dirichlet secondo Fredholm, studio dell'equazione $\Delta u + \lambda u = 0$.

C. 8 (p. 333-360). Alcune applicazioni alla fisica matematica: propagazione del calore, propagazione dell'elettricità nei fili, vibrazioni d'una membrana.

G. Vivanti.

Funzioni di variabili complesse.

G. Kowalewski, *Die komplexen Veränderlichen und ihre Funktionen. Fortsetzung der Grundzüge der Differential-und Integralrechnng, zugleich eine Einführung in die Funktionentheorie.* Leipzig und

Digitized by Google

Berlin, Teubner, 1911: 8°, p. IV + 455. (Prezzo del vol. leg. Mk. 13).

Come lo indica il titolo, la presente opera costituisce il seguito dei *Grundzüge der Differential-und Integralrechnung* dello stesso autore, di cui facemmo cenno in questo *Bollettino*, T. XIII, 1911, p. 68-69. Essa si divide in sette capitoli di estensione ineguale.

Il C. 1 (p. 1-64) contiene la teoria dei numeri complessi e delle trasformazioni lineari d'una variabile complessa, con un cenno sui gruppi poliedrici e sul gruppo modulare. Nel C. 2 (p. 64-81) si studiano gli aggregati di punti nel piano, e si dimostrano i teoremi della media per gli integrali semplici e doppi delle funzioni complesse di variabili reali. Nel C. 3 (p. 81-133) si stabilisce il concetto di funzione di variabile complessa in base alla esistenza d'una derivata unica, e si estendono alle funzioni di variabile complessa i teoremi del calcolo differenziale; si studiano le serie a termini comp'essi, in particolare le serie di potenze, e, come applicazione, la funzione esponenziale e la sua inversa. I C. 4 (p. 133-177) e 5 (p. 178-320) sono dedicati agli integrali delle funzioni di variabile complessa. Stabilito che cosa debba intendersi per " cammino " (" Weg "), si definisce l'integrale d'una funzione di variabile complessa lungo un cammino, e se ne dimostrano le proprietà fondamentali, tra cui quella che la derivata dell'integrale è la funzione integranda; ciò permette di trovare l'integrale d'una serie di potenze, e di studiare il logaritmo come integrale della funzione $\frac{1}{z}$. Si passa poi al teorema di Cauchy, ed alle proprietà delle funzioni di variabili reali che con esso si connettono; si deduce l'integrale di Cauchy, lo sviluppo di Taylor e quello di Laurent, e si risolve il problema di Dirichlet per il cerchio. Segue lo studio dei punti singolari, la teoria dei residui e la sua applicazione al calcolo di alcuni integrali definiti, l'inversione d'una serie di potenze nell'intorno d'uno zero semplice o multiplo, e l'inversione del sistema di due funzioni di due variabili reali. Il C. 6 (p. 321-435) tratta delle serie di funzioni. Stabiliti i concetti di convergenza uniforme, convergenza uniforme assoluta e convergenza normale, se ne fa l'applicazione alle questioni di continuità e di derivabilità: si dimostra il teorema di Borel-Heine (perchè non, crono-

Digitized by Google

logicamente, di Heine-Borel?), e si prendono a considerare le serie di serie di potenze; ciò dà occasione allo studio delle funzioni ζ, p, σ e delle funzioni ellittiche più generali, e ad un cenno sugli integrali ellittici. Finalmente il C. 7 (p. 436-453) contiene i teoremi di Mittag-Leffler e di Weierstrass, con qualche applicazione.

Anche per quest' opera, come per quella di cui essa è la continuazione, dobbiamo fare qualche riserva riguardo all' ordine della materia; riteniamo che una disposizione diversa avrebbe potuto evitare parecchie digressioni e ripetizioni. Ci sembra pure che certe dimostrazioni, soverchiamente minuziose e complicate, mal si accordino col tono piacevolmente famigliare di molti punti del libro; come ci sembra che per quelle proprietà delle funzioni di variabile complessa, che trovano la loro perfetta corrispondenza nelle funzioni di variabile reale, si sarebbe potuto adottare una esposizione assai più concisa. Nè comprendiamo perchè l'autore abbia voluto definire l' equiconvergenza in modo diverso dal solito, mentre subito dopo ricade nella definizione ordinaria, e di questa fa poi quasi esclusivamente uso. E per passare a qualche osservazione di minor conto: a p. 291 si deve notare che non per tutte le combinazioni di valori di a (<0) e di b (>0) è $1-e^a$ il minimo valore di $|f(z)|$; e a p. 375 la seconda formola deve correggersi: $\lim \frac{k_n}{n} = <\pi$. La stampa lascia alquanto a desiderare dal lato della correttezza.

Malgrado queste poche osservazioni, non esitiamo a porre la presente opera fra le meglio adatte ad iniziare i giovani nei concetti fondamentali della teoria generale delle funzioni di variabile complessa.

G. Vivanti.

Analisi infinitesimale.

G. Vivanti, *Lezioni di Analisi infinitesimale.* Pavia. Mattei, Speroni & C. 1911, 8° gr. p. XII-648. (Prezzo L. 15).

È la seconda edizione di un' opera che, al suo primo apparire fu diligentemente analizzata in queste colonne (v. *Bollettino* T. II, 1899, p. 91-93). Come l'A. dichiara non subirono alterazioni il piano del lavoro e le idee fondamentali; onde, malgrado le rilevanti modificazioni subite, un nuovo esame particolareggiato di

Digitized by Google

esso sembra meno giustificato; va però rilevato che non v' ha pagina che non abbia subite migliorie di sostanza e di forma, alcune delle quali (ci sia lecito ricordarlo ad onore di un nostro compianto collaboratore) furono ispirate dai consigli dati dal *Bollettino*.

Nuova e lodevole è l' Appendice, destinata a far noti i " Principii del Calcolo vettoriale " secondo i concetti e le notazioni dei professori Burali-Forti e Marcolongo. Nè possiamo tacere che l' apparenza esteriore di questo volume fa veramente onore alla giovane Casa editrice, la quale viene degnamente ad aggiungersi alle non molte che in Italia si dedicano alla letteratura scientifica. G. L.

Curve Piane.

D. Gautier, *Mesure des angles. Hyperboles étoilées et développante.* Paris, Gauthier-Villars 1911. 8°. p. 84.

Da più di due secoli si è riconosciuto che, essendo vana la speranza di dividere un angolo in parti aventi fra loro dati rapporti (in particolare di effettuare la trisezione dell' angolo) col solo uso della riga e del compasso, era presumibile di potere raggiungere lo scopo ricorrendo a linee diverse da la retta e la circonferenza. Le " cicloidi " immaginate da Tommaso Ceva nel 1699 stanno a dimostrare quanto ragionevole fosse tale presunzione. Col progredire degli studi altre curve congeneri vennero immaginate e fra esse spiccano quelle, ognuna delle quali è il luogo del vertice P di un triangolo PAA', di cui gli altri due vertici sono fissi e di cui gli angoli alla base hanno fra loro un dato rapporto μ. Tali curve vennero considerate, se non prima, nel 1839 dal Plateau, e poi studiate da P. H. Schoute (1885), E. Collignon (1903) ed altri (cfr. la mia opera *Spezielle alg und trasscendente ebene Kurven*, 2. Auflt., I Bd. 1910, p. 390 e segg.). Sono le curve che l' A. del presente opuscolo chiama " iperboli stellate " ed alle quali egli giunse da sè, senz'avere notizia delle ricerche congeneri anteriori. Va notato che egli, al pari de' suoi predecessori, suppone che il rapporto μ sia un numero razionale e così ottiene curve algebriche; tuttavia la proposizione (stabilita a pag. 11-8) " un' iperbola stellata è determinata da i poli fissi A,A' e da un suo punto arbitrario " ha un senso soltanto quando si tolga la limitazione che l' indice μ sia razionale, chè

Digitized by Google

in generale per un punto scelto ad arbitrio nel piano non passa alcuna iperbola stellata *ad indice razionale*. La necessità di togliere quella limitazione si rende palese anche per effettuare il passaggio al limite mediante cui l' A. giunge, partendo da una iperbola stellata, alla curva $\varrho = a\frac{\omega}{sen\,\omega}$, che egli ritenne nuova e quindi designò con un nome speciale (« iperbola sviluppante »), mentre altro non è che una quadratrice di Dinostrato: nè va taciuto che, anche la possibilità di giungere a questa curva partendo da una delle anzidette settrici, era stata osservata da tempo (cfr. la mia op. succitata p. 394).

Tutte le curve di cui abbiamo tenuto parola vengono dall'A. studiate accuratamente sia con procedimenti geometrici, sia mediante coordinate. I risultati a cui egli perviene sono, come è facile comprendere, noti da tempo per la maggior parte. Il fatto che l' A. vi è arrivato da solo, percorrendo la strada scelta, fa fede delle sue facoltà inventive; ma, nell' interesse della scienza, è da lamentare che egli, prima di accingersi al suo lavoro, non abbia presa cognizione dei progressi che la teoria delle curve ha compiuti, dall'epoca in cui egli frequentava la Scuola Politecnica; ove lo avesse fatto si sarebbe risparmiata l'inutile fatica di ritrovare cose già note e così avrebbe potuto contribuire più utilmente al progresso della geometria.

G. L.

Storia.

L. Schlesinger, *Bericht über die Entwickelung der Theorie der linearen Differentialgleichungen, der Deutschen Matematicher-Vereinigung erstattet.* (Sonderabdruck aus dem XVIII Bande des " Jahresbeichts der Deutscen Mathematikern-Vereinigung „). Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1909. 8°. p. IV + 133.

L' A. pone come motto al suo scritto questo bellissimo pensiero di G. Leopardi. " Il più certo modo di celare agli altri i confini del proprio sapere, è di non trapassarli „. Se con ciò egli intese di dare un ammonimento a sè stesso, si può assicurare che non ve n'era bisogno. Del creatore della teoria delle equazioni differenziali egli fu discepolo, legato da un affetto che neppur la morte valse a spezzare; a tale teoria egli consacrò un gran nu-

Digitized by Google

mero di ricerche e un trattato destinato a rimaner classico sull'argomento; chi, dunque, poteva vantare miglior preparazione di lui a tracciare un quadro di ciò che fu e ciò che è la teoria a cui è destino rimanga eternamente legato il nome di L. Fuchs? I risultati incorporati nel volume che oggi annunziamo mostrano che ben fu ispirata la Società dei matematici tedeschi ad affidare a lui il compito di esporre i molteplici e svariati studi che hanno per nocciolo la teoria delle equazioni differenziali lineari.

L'A. nota, esordendo, che Riemann sin dal 1857 concepì nelle sue linee generali tale teoria e ne fece pubblico cenno, ma che non potè dare ad essa forma definitiva, probabilmente, per le difficoltà che incontrò nel dimostrare la esistenza delle funzioni definite da un'equazione differenziale lineare, le quali vennero superate felicemente dal Fuchs combinando abilmente i metodi di Riemann con quelli di Cauchy e dei suoi discepoli. Nell'esporre le ulteriori fasi di sviluppo della teoria indicata, l'A. ha adottato un sistema intermedio fra quello storico e quello scientifico: nacque così una esposizione mista assai istruttiva e dilettevole, il cui andamento rilevasi mediante il seguente estratto dell'indice: I. Teoremi d'esistenza. II. Teoria generale. III. Analogie con le equazioni algebriche. IV. Analogie con le funzioni algebriche. V. I problemi d'inversione. VI. Problemi appartenenti alla teoria dei gruppi.

Segue un'elenco bibliografico degli scritti pubblicati sulla teoria in discorso nel periodo 1865-Settembre 1907, disposto in ordine cronologico. Come chiusa si trova un dilligente elenco dei nomi citati, il quale fa sì che nulla manchi a questo eccellente lavoro storico e di consultazione.

G. L.

Florian Cajori, *A History of the Arithmetical Methods of Approximation to the Roots of Numerical Equations of one Unknown Quantity*. Colorado College Pubblication. General Series Nos. 51, 52. Colorado Springs 1910. 8°. p. 116.

L'A. è ben noto ai nostri lettori (v. questo *Bollettino*, XIII, 1911, p. 81). Da qualche anno egli ha rivolto la propria attività di storico all'algebra; disponendo di vasta coltura e di considerevoli mezzi bibliografici egli potè completare e rettificare molte

Digitized by Google

notizie date dai più reputati scrittori sull' argomento. Il lavoro su cui crediamo opportuno fissare l' attenzione dei nostri lettori, per la vastità del piano e l' importanza dell' argomento, è degno della massima considerazione e non possiamo non lamentare che abbia visto la luce in una raccolta che, almeno in Europa, non gode di notorietà e diffusione considerevoli.

La ricerca di metodi per risolvere per approssimazione una equazione numerica comincia nell' antichità più remota, perchè risale al momento in cui, constatata la impossibilità di estrarre la radice quadratica o cubica da qualsivoglia numero, si fu costretti a contentarsi di trovarne dei valori approssimati; e, malgrado i molteplici e brillanti contributi dati alla questione, anche da matematici di primo ordine, essa non si può dire esaurita, onde la lettura della dotta rassegna che annunciamo potrà riuscire utile al progresso della scienza, dal momento che insegna fino dove si è arrivati e di dove si deve prendere le mosse per oltrepassare il limite raggiunto.

Il lavoro del prof. Cajori consta di tre parti. La I si riferisce ai tempi anteriori a Vieta; contempla specialmente i metodi proposti per risolvere le equazioni pure di grado non superiore al quarto, ma fa menzione anche dei tentativi sporadici fatti per approssimare le radici di altre. La II parte tratta dei lavori di Vieta, Newton e Lagrange e di quelli che da essi rampollano. Ai tempi moderni è consacrata la III parte; ognuna si chiude con uu lucido riassunto e con alcune osservazioni generali.

L'A. ha studiate a fondo le fonti e le ha esattamente segnalate, porgendo così un ajuto veramente provvidenziale a coloro che in avvenire vorranno sforzarsi di perfezionare un gruppo di metodi aritmetici che interessano tanto la teoria quanto la pratica.

G. L.

T. L. Heath, *Diophantus of Alexandria. A study in the History of Greek Algebra.* Second edition. Cambridge. Univ. Press, 1910. 8°. p. VII + 387 [Prezzo sh. 12 d. 6].

L' A. del presente volume non ha bisogno di presentazione, i nostri lettori conoscendo i lavori che egli ha pubblicati sopra i geometri greci del periodo aureo (*Bollettino* T. II, 1899, p. 13-14). Il nuovo volume che ne induce a occuparci di lui è la seconda edizione di una sua opera giovanile, uscita nel 1885; ma i molti

Digitized by Google

studi di cui di recente fu oggetto il principe degli aritmetici greci e l'edizione definitiva che ne fu fatta negli anni 1893-95 da P. Tannery, portarono l'A. a riprendere da capo lo studio delle questioni da lui trattate e così arricchire la letteratura storica di un lavoro quasi totalmente nuovo. Senza dilungarci in un parallelo fra le due edizioni dell'opera di cui si tratta, osserveremo come la più radicale modificazione che questa ha subito consista in ciò che, mentre il nocciolo della I ed. consisteva in un compendio in simboli moderni dell' " Aritmetica „ diofantea, la parte corrispondente nella seconda occupa un doppio numero di pagine ed è una esposizione, scritta nel nostro linguaggio matematico, di tutto quanto ci ha lasciato in eredità il sommo aritmetico alessandrino, concepita e redatta con criteri analoghi a quelli dall' A. adottati nelle sue precedenti pubblicazioni sopra la matematica greca.

Minore differenza (nel piano generale, non nei particolari) fra le due edizioni si avvertono nella parte introduttoria, destinata a porgere informazioni sopra tutte le questioni storiche che sorsero investigando la personalità e la mentalità di Diofanto. Che nessuna essenziale questione sia stata dimenticata dal coscienziosissimo A. si vede osservando che nel Cap. I egli si occupa di quanto concerne la biografia di Diofanto e la bibliografia delle sue opere, mentre nel II enumera e paragona fra loro i diversi mss. contenenti il testo dell' " Aritmetica „, nonchè le varie edizioni e traduzioni che ne vennero fatte, mostrando di avere saputo abilmente profittare di una condizione privilegiata in cui si è trovato, quello cioè di poter consultare opere che erano rimaste inaccessibili agli storici precedenti. Nel Cap. III studia la simbolica diofantea, sostenendo con nuovi argomenti alcune ingegnose congetture che lo guidarono a schierarsi fra coloro che negano a Diofanto la qualità di capostipite degli algebristi moderni, dal momento che i pretesi simboli algebrici da lui usati altro non sarebbero, secondo l'A., che parole abbreviate per comodo di scrittura (1). Nel Cap. IV egli studia con soddisfacente ampiezza i metodi con cui Diofanto risolve i problemi

(1) Siaci lecito osservare (e sarà questo l'unico appunto che rivolgeremo all' A.) che tale conclusione può recare qualche sorpresa in un' opera che, nel titolo viene dichiarata essere un contributo allo studio dell' « *algebra* dei Greci ».

Digitized by Google

aritmetici (1) e nel seguente i teoremi che fungono da lemmi o corollari rispetto alle questioni trattate. Da ultimo, nel Cap. VI, egli si propone di determinare quale posto competa a Diofanto nella storia dell'aritmetica greca, ed a tale scopo espone un riuscitissimo quadro delle cognizioni che i suoi conterranei anteriori possedevano intorno alle qualità dei numeri.

Come è notorio dagli scritti di Diofanto trae origine la nostra aritmetica superiore, la quale, per opera di Bachet de Méziriac, Fermat, Eulero, Lagrange, Legendre e Cauchy, raggiunse quel grado di perfezione e maturità che erano necessarie per rendere possibile la comparsa di un innovatore e legislatore quale Gauss, onde nessuna meraviglia se quei grandi nomi ricorrano incessantemente nei dotti commenti di cui l'Heath ha arricchiti i metodi diofantei. Ma egli, al pari di tutti coloro che impresero ad occuparsi della teoria dei numeri-subì l'irresistibile fascino di quella bellissima scienza che il Kummer a ragione chiamò « la chimica dei numeri »; onde volle prolungare a sè ed ai propri lettori il piacere che provava intrattenendosi con quelli " spiriti magni ", adunando in apposite appendici quanto essi avevano pensato e scritto sotto l'influenza dell'immortale aritmetico alessandrino: i giovani studiosi debbono essere e saranno certamente riconoscenti a lui per l'istruzione che ha loro procurati con questa sua nuova fatica.

Riuscirà l'A. con questo nuovo lavoro ad accendere nei matematici del suo tempo l'ammirazione ed un fecondo amore per il grande che, nella virtuosità analitica, fu forse superato soltanto da Leonardo Eulero? Speriamolo ed auguriamolo! Lo speriamo senza soverchia fede, ben sapendo quanto diffusa sia la falsa opinione che nega agli antichi scienziati qualunque virtù di dirigere e spronare oggi alla ricerca delle proprietà

(1) È notorio come la miglior parte delle questioni trattate da Diofanto si traducano in sistemi indeterminati di equazioni algebriche, le quali vengono dal geometra greco trattate nel senso che si cercano i numeri *razionali* che le soddisfanno, mentre per noi l'analoga ricerca verte sopra le soluzioni *intere*; ciò prova la sostanziale differenza che passa fra la nostra « analisi indeterminata » e gli studi di Diofanto e l'improprietà di linguaggio che si commette da tutti coloro che designano col nome « analisi diofantea » la ricerca delle soluzioni intere delle equazioni indeterminate. Osserviamo ciò per amore della verità, non con la speranza di modificare un'abitudine invalsa, giacchè sappiamo benissimo essere più facile fare trionfare un'idea rivoluzionaria, che ottenere una semplice modificazione alla nomenclatura in uso.

Digitized by Google

dei numeri e delle figure. Le auguriamo con fervido desiderio, perchè siamo convinti che da ogni contatto del vecchio col nuovo è da sperarsi si sprigioni qualche scintilla di verità. E per concretare sopra un esempio concreto il nostro concetto ricorderemo come uno dei più importanti problemi considerati (non diciamo risoluti) da Diofanto consista nella risoluzione della " doppia equazione ", cioè la ricerca dei valori razionali di una variabile che rendono contemporaneamente quadrati perfetti due trinomi di secondo grado a coefficienti interi, ossia la risoluzione in numeri razionali delle equazioni

$$ax^2 + bx + c = y^2, a'x^2 + b'x + c' = z^2.$$

Ora tale questione rientra nella ricerca dei punti " razionali " della quartica di I specie rappresentata dalle equazioni ora scritte quando x, y, z siano coordinate cartesiane di un punto dello spazio, epperò viene naturalmente a prender posto nell' ordine d' idee inaugurato dal Poincaré con i suoi studi sopra le proprietà aritmetiche delle curve algebriche; è vero che il Poincaré ha limitate le proprie considerazioni al piano, ma chi può assicurare che il metodo della projezione centrale non possa utilmente servire anche in questo caso per passare da una quartica gobba ad una cubica piana?

G. L.

W. B. Frankland, *Theories of parallelism. An historical critique.* Cambridge University Press, 1910 8°. p. XVIII+70 (Prezzo 3 sh.).

Nessuno argomento geometrico ha esercitata sopra gli storici un fascino così potente come la teoria delle parallele; l' A. che già ne aveva toccato in una precedente sua pubblicazione (v. *Bollettino*, T. V, 1902, p. 117) ha creduto di farne oggetto di un lavoro *ad hoc*, malgrado il congenere e più esteso lavoro dei sig.ri Engel e Stäckel sullo stesso tema (che egli cita) e quello del Bonola (che probabilmente gli è rimasto ignoto). Nel libro che annunciamo i nostri lettori che tennero dietro allo sviluppo della geometria non-euclidea troveranno un grande numero di nomi e fatti a loro noti; ma incontreranno anche qualche notizia avente sapore di novità, almeno per coloro che vivono sul

Digitized by Google

continente. Tali sono quelle ad es. che concernono un certo Oliver, medico di Bury (1), che tra un salasso e l'altro trovò il tempo per congegnare due dimostrazioni del famigerato postulato, e quelle relative ad Enrico Meikle, il quale, verso la metà del secolo scorso, si occupò dello stesso soggetto, esponendo idee di cui più tardi venne dimostrato il valore e la fecondità.

L'A. ha adottato un metodo di esposizione che va segnalato se non altro per la sua novità: egli premette un riassunto delle conclusioni che oggi rappresentano l'ultimo portato della scienza intorno alla teoria delle parallele e per ogni autore che incontra cerca di determinare quanto in esso si possa trovare di tali conclusioni. È un metodo originale, il quale però non è scevro dal grave pericolo di indurre involontariamente a leggere fra le linee degli antichi i pensieri che germogliarono soltanto nella mente di posteri lontani. Con ciò non vogliamo dire che l'A. non abbia saputo scansare tale pericolo; vogliamo soltanto mettere sull'avvisato chi per avventura volesse adoperare in altre occasioni lo stesso seducente sistema.

G. L.

The Royal Society. Some Account of the "Letters and Papers" of the period 1741-1806 in the Archives, with an Index of Authors. Compiled by A. H. Church. Oxford, 1908. 8°. p. 73.

Non si tratta di un'opera storica in senso proprio, ma di un lavoro informativo intorno alle persone che ebbero qualche rapporto con la Società Reale di Londra. Trattandosi di una delle massime corporazioni scientifiche del mondo, siffatti rapporti, interessano gli storici della scienza, onde ben fu ispirato il Church a farli conoscere anche a coloro che non sono in grado di compulsare i documenti conservati negli archivi di quel celebre sodalizio. Al volume (che non si trova in commercio) cresce pregio la riproduzione in fototipia della lettera di ringraziamento che scrisse Linneo quando venne eletto F. R. S.

G. L.

(1) Sfuggito persino alla sagacia de Poggendorff e noto solo per nome ai sig.ri Engel e Stäckel.

Digitized by Google

H. POINCARÉ, *Savants et écrivains.* Paris, E. Flammarion, 1910. 8°. p. XIV-279. [Prezzo fr. 3].

Questo volume si apre con la riproduzione del discorso tenuto dal compianto A. il 28 Gennaio 1909, giorno in cui entrò a far parte dell'Accademia francese (elogio di Sully Prudhomme) (*) e si chiude con l'allocuzione da lui tenuta alla riunione amichevole degli antichi alunni della Scuola politecnica il 23 Gennajo 1903 (elogio della Scuola politecnica). Il resto è costituito da notizie biografiche su alcuni scienziati recentemente scomparsi dalla scena bel mondo (CURIE, BROUARDEL, LAGUERRE, HERMITE, CORNU, HALPHEN, TISSERAND, BEATRAND, BERTHFLOT, FAYE, POITIER, WEIERSTRASS, LORD KELVIN, LOEWY), spogliate dai particolari troppo tecnici che contenevano in origine. Tutti questi scritti erano già stati pubblicati, onde molti lettori non troveranno cose tanto istruttive ed interessanti quali sogliono apprendere dagli scritti del celebre matematico francese. Ma totalmente nuova riuscirà a tutti la garbata introduzione con cui si apre il presente volume nella quale vien gettato uno sguardo d'insieme alla vita dei pensatori di cui più innanzi si legge la vita, per dedurre le caratteristiche comuni intellettuali e morali: tali caratteristiche sono così elevate che è lecito concludere che gli scienziati costituiscono l'onore della nostra razza, non solo per le opere della loro mente, ma anche per gli esempi di bontà e di disinteresse che hanno fornito ai loro contemporanei ed ai posteri.

G. L.

Geometria.

M. LINDOW, *Die Anwendung der Differentialrechnung auf das technische Zeichen.* Mit. 45 in den Text gedruckten Figuren. Jena, H. W. Schmidt, 1910. 8°. picc. V+88. (Prezzo Mk. 2).

Che colui il quale voglia disegnare esattamente una curva debba conoscerne le principali proprietà è cosa a tutti notoria

(*) Perchè mai l'illustre scienziato non ha riprodotto, in appendice al suo discorso il suo interessantissimo articolo *Sully Prudhomme mathématicien* inserito nella *Revue générale des sciences* del 15 Agosto 1909? Facendolo egli avrebbe lumeggiato, dinnanzi agli occhi de' suoi lettori, un lato notevolissimo della mentalità del grande poeta francese, dal momento che, come egli stesso riconosce « l'âme d'un homme éminent est par elle-même un sujet d'étude digne d'intérêt ».

Digitized by Google

ed evidente. Ora se in passato qualcuno si fosse proposto di porgere ai disegnatori le nozioni di cui hanno bisogno intorno alle più comune linee piane, avrebbe probabilmente esumate le considerazioni sintetiche in uso a partire da Archimede ed a giungere sino a Leibniz e Newton. L'A. ha pensato che oggi è invece migliore consiglio ricorrere al calcolo e col presente volume ha inteso di insegnare ai disegnatori tutte le nozioni di calcolo infinitesimale che potranno riuscire ad essi giovevoli. Si può dire che in complesso abbia raggiunto il suo scopo; soltanto sarebbe da consigliargli in una futura edizione di accrescere il numero degli esempi illustratori delle teorie esposte.

G. L.

W. Vogt, *Synthetische Theorie der Cliffordschen Parallelen und der linearen Linienörten des elliptischen Raumes.* p. VIII+58. 8°. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1909. [Prezzo Mk. 2.40].

Nello spazio non euclideo, come nello spazio ordinario, due rette si dicono *parallele* quando hanno comune un punto situato all'infinito; si è creduto per molto tempo che fosse questa l'unica specie concepibile di rette parallele; ma nel 1870 W. K. Clifford scoprì che nella geometria ellittica si possono considerare delle coppie di rette sghembe dotate di tutte le proprietà che caratterizzano due parallele euclidee. Le idee dell'originale geometra inglese non ebbero subito grande successo: è merito di R. Stawell Ball (1889) e F. Klein (1890) di averne messo in luce il valore e l'importanza. In tale via essi furono eseguiti da E. Study, J. Coolidge, L. Bianchi, G. Fubini ed altri i quali si servirono di svariati procedimenti per stabilire altrimenti e completare in vario modo i risultati del Clifford.

Trattandosi di questioni relative alla geometria elementare sorga naturale l'idea di studiarle coi soli sussidi della pura geometria; gli è ciò appunto che si è proposto ed è riuscito a fare W. Vogt. Definite due parallele " alla Clifford „ come due rette che ammettono *infinite* perpendicolari comuni (mentre nello spazio ellittico due rette hanno in generale *due* sole perpendicolari comuni, che stanno sulle quadrisecanti della quaterna costituita da quelle rette e delle loro polari rispetto all'assoluto), l'A. dimostra che tutte queste perpendicolari hanno la medesima lunghezza, onde, passando dalle ordinarie parallele alle nuove, non va perduta la

Digitized by Google

proprietà di equidistanza. Similmente si estendono altre proprietà delle parallele e di altre figure a cui essa dava luogo (ad es. i parallelogrammi e certi sistemi di rette), come in parte era stato notato da coloro che se ne occupavano prima dell'A.

Col presente opuscolo l'A. ha saputo degnamente continuare le tradizioni geometriche tedesche: egli ha mostrato che i metodi di ricerca concepiti da Steiner e sviluppati poi di Schröter, da Reye, da R. Sturm, possono applicarsi con successo a nuovi campi; auguriamo che egli continui in tale via e che il suo esempio venga seguito da altri.

G. L.

PAUL B. FISCHER. *Koordinatensysteme.* Sammlung Göschen N. 507. p. 125. Leipzig G. J. Goeschen 1911. (Prezzo Mk. 0,80).

Questo nuovo volumetto della ben nota raccolta ha lo scopo di servire come complemento alle consuete trattazioni elementari della geometria analitica, scopo di esso essendo di dare notizia di alcuni sistemi di coordinate a cui giova ricorrere quando si abbandona il primo studio delle più semplici figure geometriche: coordinate. Nell'ultima parte l'A. fa cenno della geometria analitica degli spazi superiori, in particolare della geometria della retta. Chiude il volume un elenco delle fonti a cui l'A. attinse.

G. L.

G. LAZZERI und A. BASSANI, *Elemente der Geometrie (unter Verschmlzung von ebener und räumlichen Geometrie). Mil Genegmigung der Verfasser aus dem Italienischen übersetzt ven* P. TREUTLEIN. Mit 336 Figuren im Text. Leipzig un Berlin, B. G. Teubner, 1911, 8°. gr. p. XVI 491. (Prezzo del vel. leg. Mk. 14).

Da qualche tempo la Germania ha presa a tradurre quelle opere didattiche che sono improntate a concetti dotati di qualche originalità: come fece per un noto libro dei fratelli Tannery e per i volumetti ancor più noti del Borel, fa ora per il trattato italiano in cui la " fusione „ della planimetria con la stereometria è praticata con maggior larghezza. Il trattato in discorso è troppo noto in Italia perchè faccia mestieri discorrerne quì; ma l' onore

Digitized by Google

cui esso fu fatto segno andava rilevato affinchè i lettori che s'interessano di questioni metodologiche possano essere posti sull'avvisato che la " fusione „ sta per essere giudicata e posta alla prova anche in Germania; siamo curiosi di vedere gli effettt di una cosa e dell'altra!

G. L.

W. Gallatly, *The modern geometry of the triangle: Lemoine and Brocard points, angular and tripolar cordinates, pedal and antipedal triangles, the medial triangle, Simson's line, the ortopole-orthogonal proiction.* London F. Hodgson 1911. 8° p. 70 (Prezzo 2 sh. 6 d.).

Questo opuscolo porta un titolo così particolareggiato che non è necessario che noi spendiamo molte parole per descriverne il contenuto: si tratta di una nuova esposizione delle più cospicue proprietà possiedute da un triangolo piano e dalle figure rettilinee che vennero ad esso collegate. L'esposizione è concisa, ma non difficile; non si può, però, designare per totalmente elementare giacchè presuppone che il lettore abbia una certa famigliarità col concetto di coordinate e con le varie specie di coordinate triangolari. Osserviamo ciò perchè, essendo molte proposizioni della geometria del triangolo di sapore prettamente euclideo, sarebbe desiderabile il possederne una esposizione intelligibile anche ad uno studente in possesso soltanto degli *Elemenli* di Euclide. Esiste nella letteratura matematica una esposizione siffatta? Le ignoriamo, tutte quelle che conosciamo essendo scritte nello stile scelto dal nostro A.; in caso negativo ci sembra sarebbe il caso di scriverla per diffondere la conoscenza di alcune proposizioni di una eleganza impressionante. Altro problema che si presenta è di vedere quali delle proprietà del triangolo si conservino passando dal piano alla sfera; l'uno e l'altro vanno raccomandati all'A. dell'annunciato opuscolo ed a tutti quelli che conoscono, con profondità pari alla sua, le proprietà di quella figura.

G. L.

Georg Scheffers, *Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume.* Zweite verbesserte und vermehrte Auflage. Mit. 107 Figuren im Text. Leipzig Veit & Comp. 8°. 1910 pag. X+482.

Quale sia il piano di questo trattato è noto ai nostri fedeli lettori, essendo esso stato delineato quando ne apparve la prima

Digitized by Google

edizione (v. *Bollettino* T. IV, 1901, pp. 44-46) ed essendo esso stato fedelmente mantenuto nella seconda. Nel passare dall'una all'altra il volume si è accresciuto di circa un terzo della sua mole e di un terzo si aumentarono anche le bellissime figure. Inoltre ricerche dottrinali recenti (specialmente quelle dello Study in continuazione ed a miglioramento di alcune del Lie) portarono a notevoli migliorie sostanziali, mentre altre vennero apportate alle notizie storico-bibliografiche. E poichè d'altronde lo stile nulla ha perduto del suo antico splendore, nè l'apparato analitico della sua notoria eleganza, così non v'ha dubbio che l'opera dell'egregio professore del Politecnico di Charlottenburg manterrà ancora per lungo tempo il posto eminente che seppe conquistare nella letteratura matematica tedesca.

G. L.

Trigonometria.

Ernst Eckhardt, *Zurückführung der sphärischen Trigonometrie auf die Geometrie des ebenen Kreisvierecks (Neue Grundlegung für die Formeln der sphärischen Trigonometrie).* Lipsia, Teubner, 1909. 8°, p. 155+VI. (Prezzo del vol. leg. Mk. 5).

In questo libro l'A. ad ogni triangolo sferico coordina un quadrilatero inscrittibile in una circonferenza, o meglio in una schiera di tali quadrilateri, tutti simili tra loro; nel quadrilatero uno degli angoli delle diagonali è uguale ad uno di quelli del triangolo sferico, e gli angoli adiacenti al lato compreso in quell'angolo sono uguali agli altri due angoli del triangolo dato. Basandosi sul primo teorema del coseno, esprime facilmente e con formule semplicissime tutti gli elementi del quadrilatero in funzione di quelli del triangolo, e ne ricava poi tutte le relazioni della trigonometria sferica, mostrando così come esse sieno tutte conseguenza di quell'unico teorema. In una seconda parte l'A. studia le formule di Neper, Delambre, Lhuillier anche in relazione ai concetti più ampii di triangolo sferico dati dallo Study e dal Möbius, e raccoglie ciascun gruppo di formule in una sola simmetrica, nei suoi elementi. Anzi studiando queste formule dal punto di vista gruppale completa i sistemi predetti con altre formule. Nella 3ª parte, sempre basandosi sulle relazioni tra il triangolo sferico ed il

Digitized by Google

quadrilatero piano, dei vari problemi della trigonometria sferica dà delle soluzioni, che si prestano ad essere svolte graficamente. Infine applica quella relazione alla costruzione dei nove angoli di una sostituzione ortogonale in tre variabili.

Questo studio prende le mosse da un'idea dello Study, ma poi, credo, è del tutto originale; è svolto con eleganza e semplicità, e ne è certo utile la lettura per chi si vuol rendere conto dell'essenza della trigonometria sferica. La forma simmetrica e semplice che vien data ad alcune formule può tornare utile anche nella scuola, tanto più che molto spesso vi si può arrivare direttamente senza troppa difficoltà, quando ci si contenti di non avere l'interpretazione geometrica delle sostituzioni da farsi.

SIRO MEDICI.

Attualità.

Annuaire pour l'an 1913 publié par le Bureau des Longitudes. Avec des notices scientifiques. Paris, Gautier-Villars. Prezzo fr. 1.50).

Oltre le solite rubriche, che rendono la presente pubblicazione un *vade-mecum* indispensabile per gli astronomi e per i fisici, questo volume contiene un articolo di G. Bigourdan sopra la *Eclipse de soleil du 17 Avril 1912* ed uno del Ferrié sull'*Application de la telegraphie san fil à l'envoi de l'heure,* nonchè il testo dei discorsi detti ai funerali di R. Radau. Inoltre esso, a differenza dei precedenti della stessa raccolta, è destinato a venire cercato anche dai futuri storici della matematica, i quali nei discorsi pronunziati alle esequie di H. Poincaré dal ministro della pubblica istruzione e dai rappresentanti dei numerosi corpi scientifici a cui egli appartenne, cercheranno e troveranno preziose notizie intorno al grande matematico di cui la Francia porta attualmente il lutto.

G. L.

Rassegna di recenti Dissertazioni di Laurea.

J. BOGRAD, *Die Astroindenfläche.* Inaugural dissertation. Bern 1909.

Per ragioni facili a comprendersi l'A. dà il nome di super-

Digitized by Google

ficie astroidale ad una superficie rappresentata come segue in coordinate cartesiane ortogonali: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = 1^{\frac{2}{3}}$.

È una superficie di sesta classe e diciottesimo ordine, di cui l'A. trova la forma e determina il volume; applica poi ad essa anche le formole classiche della geometria differenziale, per studiare i fenomeni che presenta lo studio della geometria su di essa.

P. Montfort, *Die Auflösung der numerischen Gleibungen nach Fourier.* Diss. Freiburg i. Br. 1910.

Nella sua *Analyse des équations déterminées* Fourier ha per la prima volta esposto il metodo che porta il suo nome o anche di « divisione ordinata », ed inoltre ha fatto vedere come esso possa servire a risolvere le equazioni numeriche. Egli però non ha dato alcuna dimostrazione dell'esattezza di quel « metodo limitandosi a farne conoscere il maneggio, e così non ha dimostrata l'esattezza del suo procedimento per risolvere le equazioni. Lüroth (*Verlesungen über numerisches Rechnen,* Leipzig, 1900) ha esposto esattamente il « metodo della div. ord. » e di più lo ha completamente applicato alla risoluzione delle equazioni quadratiche. Nel presente lavoro altrettanto viene fatto per una equazione di grado qualunque, con speciale riguardo alle equazioni binomie ($x^m = a$) e trinomie ($x^m + b\,x^n = a$): non mancano nemmeno le applicazioni numeriche dei metodi esposti.

K. Becker, *Körper grösster Anziehung auf ein und zwei Ellipsoide von* n *Dimensionen.* Diss. Halle a. S., 1910.

Per estendere allo spazio ad n dimensioni i risultati di alcune celebri ricerche sopra l'attrazione degli ellissoidi (cfr. A. Wangerin, *Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen,* I. Bd. Leipzig, 1909, p. 129) l'A. ammette che in detto spazio due corpi di masse m,m' si attraggano secondo la legge espressa dalla formola $\mu \frac{mm'}{2^{n-1}}$, ove r è la distanza dei punti considerati e μ un coefficiente costante. Le questioni che egli tratta (estendendo abilmente le note trattazioni analitiche corrispondenti alle ipotesi $n=2$ e 3) risultano dal seguente indice:

Digitized by Google

Parte I. *Corpo di attrazione massima per un ellissoide a* n *dimensioni.* Cap. I. Soluzione del problema. Cap. II. Corpo di attrazione massima. Cap. III. Casi speciali. Parte II. *Corpo di attrazione massima per due ellissoidi a* n *dimensioni.* Cap. I. Soluzione nel piano. Cap. II. Soluzione per lo spazio ordinario. Cap. III. Soluzione per S_n . *Appendice.* Generalizzazione della questione a *k* ellissoidi a *n* dimensioni.

H. Waesche. *Beiträge zur Untersuchung über Maximalanziehungen homogenes Körper bei Zugrundlegung des Anziehungsgesetzes* $\frac{1}{\varrho^p}$. Diss. Halle a. S. 1911.

Questo lavoro ha un tema somigliante a quello trattato nella Diss. precedente. Essa consta di due parti distinte. Nella I sono studiati i solidi di massima attrazione nell'ipotesi che la legge secondo cui si attraggono due punti posti fra loro alla distanza ϱ sia espressa da $\frac{1}{\varrho^p}$; ed è dimostrato il fatto interessante che, se tali solidi sono di rotazione attorno ad essi conosciuti, le curve meridiane sono « linee mediatrici », rappresentabili cioè in coordinate polari da equazioni del tipo $r = a \cos^q \varphi$, ove $q = \frac{1}{p}$. Nella II^a sono studiate le attrazioni esercitate da determinati solidi sopra certi punti speciali della loro superficie, sempre nell'ipotesi che la legge d'attrazione sia quella indicata prima.

A complemento di tali informazioni diamo i titoli dei paragrafi componenti l'intero lavoro:

I. Parte: 1. Equazione del solido di massima attrazione. 2. Studio delle curve meridiane dei corpi di massima attrazione di dato asse. 3. Costruzione geometrica delle curve meridiane pei valori $p = 3, \ldots, 10$. 5. Contegno delle curve meridiane nei punti attratti. 6. Raggi di curvatura nel polo e nell'antipolo delle curve meridiane. 7 I corpi di attrazione massima e di dato volume.

II Parte: 8. Dipendenza dell'attrazione dal valore di *p* per la legge $\frac{1}{\varrho^p}$. 9. Conferme mediante esempi. 10 considerazioni generali sopra l'attrazione massima esercitata da porzioni di solidi. 11. Corollari del teorema di Sella. 12. Complementi e generaliz-

Digitized by Google

zazioni del teorema di Sella per la legge $\frac{1}{\varrho^2}$. 13. I teoremi di Sella e le loro generalizzazioni per la legge $\frac{1}{\varrho^p}$. 14. Teoremi generali intorno all'attrazione di superficie secondo la legge $\frac{1}{\varrho^p}$. 15. Attrazioni massime per forme di dati tipi secondo la legge $\frac{1}{\varrho^2}$.

G. L.

Pubblicazioni recenti sulla storia delle matematiche.

H. Bosmans, *Galilée ou Huygens? A propos d'un épisode de la première application du pendule aux horologes.* Revue des questions scientifiques 1912.

Alla questione storica toccata nel presente articolo il Favaro ha dedicato due lavori, uno dei quali recentissimo; appunto la lettura di questo ha consigliato il dotto autore di raccogliere e pubblicare alcuni documenti interessanti e poco noti che possono servire a comporre il dissidio; la sentenza viene lasciata ad altri o riserbata ad altra occasione.

Florian Cajori, *Historical Note on the graphic representation of imaginaries before the times of Wessel.* The American mathematical Monhly, October-November 1912.

Questo articolo contiene molte notizie sconosciute sopra la preistoria della rappresentazione geometrica dei numeri complessi a partire da Wallis; fra gli scritti citati ci piace fissare l'attenzione dei nostri lettori sulle cinque lettere di Vincenzo Riccati *Sopra i logaritmi dei numeri negativi* (Modena, 1779).

R. Giacomelli, *Un contemporaneo di Galileo: Giuseppe Ballo.* Atti della R. Accademia delle Scienze fis. e mat. di Napoli, Ser. II, Vol. XV, 1912.

Il Ballo, di cui nel presente scritto vengono poste in luce le

Digitized by Google

benemerenze per la meccanica, è il primo che abbia enunciato chiaramente il " principio d'inerzia „ sino al 1635. Tale scritto si chiude con la riproduzione della rarissima memoria del Ballo " De motu corporum naturali nondum audita ratio depromitur ac demostratur „, la quale documenta i diritti di priorità dell'A. riguardo a quel principio.

G. L. Arrighi, *Le polemiche in Italia su la misura e la conservazione della forza.* Cultura filosofica, anno VI, 1912.

M. Simon, *Die Dreihundertjahrfeier des Logarithmentafel.* Osterreichische polyteschenische Zeitschrift, 15 Agosto 1913.

Il proposito manifestato dalla Società Reale di Edimburgo di commemorare il terzo centenario della pubblicazione dell'opera capitale di Nepero (v. p. 96), dà occasione all'A. di porre in luce la indiscutibile benemerenza dello svizzere Joost Bürgi nell'invenzione dei logaritmi.

W. Ahrens, *Das " Josephspiel " ein aritmetisches Kunststück, Geschichte und Literatur.* Archiv fur Kulturgeschichte, T. XI, 1913.

Questo articolo mantiene ampiamente quanto promette; del noto " Ludus Joseph „ che non manca in alcuna raccolta di ricreazioni matematiche, sono indicate le differenti versioni date da documenti occidentali ed orientali (cfr. questo *Bollettino*, T. IX, 1906, p. 69); in fine sono anche raccolti e riferiti i versi che da vari autori vennero composti per ricordarne mnemonicamente la soluzione.

H. Wieleitner, *Ueber zwei algebraische Einleitungen zu Descartes " Géométrie ".* Blätter für der Gynnasial-Schulwesen, T. 49, 1913.

L'A. studia in questo articolo due lavori illustrativi delle *Geometrie,* uno di E. Bartholin, l'altro anonimo, interessandosi specialmente delle notazioni algebriche ivi adoperate.

H. Bosmans, *Sur quelques exemples de la méthode des limites chez Simon Stehin. Les démonstrations par l'analyse infinitésimale*

Digitized by Google

chez Luc Valerio. Annales de la Société Scientifique de Bruxelles. T. 37, 1912-13.

Il primo di questi articoli si propone di mostrare che Stevino merita un posto nella storia del calcolo infinitesimale e di stabilire il perchè egli sia stato sinora negato. Nel secondo viene posta in luce l'abilità di Luca Valerio e provata l'influenza da lui esercitata sopra G. di S. Vincenzo. Con l'adunare diligentemente e l'esporre in linguaggio moderno i metodi ed i risultati dovuti ai geometri che prepararono il calcolo infinitesimale moderno, il P. Bosmans compie opera veramente meritoria; è da augurare che il suo esempio venga largamente seguito.

A. Favaro, *Studi e ricerche per una iconografia galileiana.* Atti del R. Istituto Veneto. T. LXXII, 1912-13.

Come lo dice il titolo di questo lavoro, sono ivi raccolti, in ordine cronologiche, estese e esatte notizie intorno alle varie effigi di Galileo: quali, statue e medaglie.

Notizie.

Concorso a premio in occasione del VI Congresso matematico, che verrà tenuto a Stockholm nel 1916. Il re di Svezia Gustavo V, fedele alle tradizioni di mecenatismo scientifico della sua casa, ha deciso di assegnare una medaglia d'oro portante il ritratto di Weierstrass e tremila corone alla più cospicua scoperta fatta nel campo delle funzioni analitiche. I concorrenti a tale premio devono inviare i loro lavori al Direttore degli *Acta matematica* non più tardi del 31 ottobre 1915, centenario della nascita del Weierstrass. Tali lavori, che debbono avere un soggetto appartenente alla teoria generale delle funzioni, oppure ad una classe speciale notevole di funzioni, devono contenere un motto, nonchè il nome e l'indirizzo dell'autore, essere inedite e scritte in francese, inglese o tedesco. Giudice del concorso sarà una commissione di membri dell'Accademia Svedese delle scienze costituita da Mittag-Leffler, Falk, Phragmen, Wiman, Bendixson, von Koch e Fredholm.

Digitized by Google

INDICE DEI NOMI

Agnesi Maria Gaetana 13.
Ahrens 127.
Albutt 64.
Alchwarizmi 97, 98.
Alcuin 44.
Alessandro Magno 43.
Amaldi 13-17.
Amodeo 95.
Antifonte 43.
Apollonio 2, 43, 84.
Archimede 2, 4, 33, 22, 43, 82, 119.
Archita 43.
Aristarco 64.
Aristeo 43.
Aristotele 43.
Arrighi 127.
Aryabhatta 44.
Bachet de Méziriac 115.
Bacone 64.
Ball Rouse 64.
Ball Stawell 119.
Ballo 126, 127.
Bâskara 44.
Bassani 120-121.
Bataillon 30.
al Battani 44.
Bayes 21.
Becker 124, 125.
Beda 44.
Bendixson 128.
Bergmann 32.
Bernoulli 24, 29, 99, 100.
Bernstein 80.
Berthelot 118.
Bertrand 118.
Berzolari 17, 66.
Bessel 32.
Besthorn 31.
Betti 65, 70.
Bianchi L. 65, 119.
Bigourdan 123.
Bograd 123.
Boirac 30.
Boncompagni 97.
Bonola 116.
Bopp 63.
Borel 53, 108, 109, 120.
Borelli 2-8, 33-41.
Bortolotti 26, 97.
Bosmans 126, 127.
Bottasso 87.
Bourget 9.
Bourlet 30.
Brahamaguptha 44.
v. Braunmühl 42.
Brewster 11.
Brianchon 86.
Brisone 43.
Brocard 121.
Brouardel 118.
Bruno 66.
Bubnov 64.
Bürgi 127.
Burali-Forti 67, 69, 77, 81-87, 110.
Burckhardt.
Burgatti 91.
Cajori 112-113, 126.
Campano 33.
Cantor G. 23, 38, 47, 80.
Cantor M. 3, 42, 45, 46, 47, 63, 97.
Capelli 101,
Carlyle 11.
Cartan 14.
Cartesio *vedi* Descartes.
Cassini 83.
Catalan 85.
Cauchy 24, 25, 29, 108, 112, 115.
Cavalieri 2, 13, 45.
Cebyceff 18, 19, 21.
Celoria 95.
Cesàro 101.
Ceva T. 110.
Chasles 67, 85, 86.
Chini 21-23.
Chuquet 44.
Church 117.
Ciani 60.63.

Digitized by Google

Cinelli 95.
Clairaut 29.
Clifford 119.
Cola 95.
Colletta 95.
Collignon 910.
Collot 30.
Coolidge 119.
Copernico 45.
Cornu 118.
de Corradi d' Austria 12, 13.
Crelier 60.
Curie 118.
Cusa 44.
Darboux 28.
Dedekind 3, 6, 8, 37, 38, 68.
Delambre 122.
Denjoy 55.
Desargues 61.
Descartes 42, 45, 83.
Dini 65, 101.
Dinostrato 111.
Diocle 43.
Diofanto 44, 114, 115, 116.
Eckhardt 122-123.
Eneström 11-13, 31, 46, 47.
Engel 9, 14, 116, 117.
Enriques 2, 3, 4.
Ensheim 63.
Erone 43.
Euclide 1, 2, 3, 6, 8, 11, 31, 33 34, 36, 39, 43, 121.
Eudosso 43.
Eulero 10, 11-12, 25, 28, 31, 100, 115.
Fabroni 3.
Falconieri 2.
Falk 128.
Favaro 94, 95, 126, 128.
Faye 118.
Fechner 106.
Fergola Nicola 95.
Fermat 115.
Ferrié 123.
Fibonacci 44.
Finzi 65.
Fischer 120.
Fourier 124.
Frankland 116-117.
Fredholm 107, 128.
Frenet 84.
Fubini 119.
Fuchs 112.
Fuss N. 12.
del Gaizo 3.
Galilei 1, 30, 39, 89, 94, 95, 126 128.
Gallatly 121.
Gallucci 58-59.
Garobei 96.
Gauss 21, 100, 115.
Gautier 110-111.
Gerberto 44, 64.
Giacomelli 126.
Giordano Annibale 95.
Girard 45.
G. L. *vedi* Loria.
Goldziher 64.
Grassmann G. 9.
» H. 9, 82, 83.
Green 28, 107.
Günther H. 42-45.
Guimaraes 12.
Gustavo V 128.
Hagen 12.
Halphen 118.
Hamel 87-91.
Hankel 32
Harriot 45.
Heath 11, 113-116.
Heiberg 31.
Heine 108, 109.
Hennesey 102.
Hermite 9, 99, 118.
Hilbert 69.
Hôpital 27.
Horn 106-107.
Huygens 95, 126.
Ipparco 43.
Ippia 43.
Ippocrate 43.
Issel 106.
Jordan 53.
Kelvin Lord 118.
Keplero 45, 103, 104.
Kikuchi 96,

Digitized by Google

Kirchhoff 89.
Klein F. 119.
von Koch 128.
Kommerell 59.
Korn 63.
Kowalewski G. 107-109.
Kummer 58.
Lagrange 10, 63, 99, 113, 115.
Laguerre 118.
Laisant 30.
Lamé 9.
Laplace 19, 107.
Laurent 108.
Lazzeri 120-121.
Lefèvre 44.
Legendre 11, 25, 115.
Leibniz 31, 46, 119.
Lejeune-Dirichlet 107, 108.
Lemoine 121.
Leodamonte 43.
Leopardi 111.
Levasseur 14, 15.
Lhuillier 122.
Liapounoff 18.
Libri 97.
Lie 13, 14, 15, 16, 122.
Liebmann 17.
Lietzmann 31.
Lindow 118-119.
Linneo 117.
Liouville 9.
Loeb 106.
Loewy 118.
Loria 9, 10, 11, 12, 23, 30, 46, 59, 60, 64, 91-93, 102, 111, 112, 113, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 126.
Lüroth 124.
Magni 3.
de Malmesbury 64.
Manes 32.
Maraldi 103, 104.
Marcolongo 69, 101, 110.
Markoff 17-21.
Masieri 97.
Medici 93, 123.
Medolaghi 14.
Meikle 117.
Menecmo 43.
Menelao 43.
Méray 30.
Meth 31.
Mikami 32.
Mittag-Leffler 101, 109, 128.
Möbius 122.
Mohammed ben Musâs 44, 98.
de Moivre 20.
Monge 29.
Montfort 124.
Montucla 45.
de Morgan 11.
Nardidei 65.
Nemorario Giordano 44.
Nepero 45, 96, 122.
Newton 27, 31, 46, 113, 119.
Nicomaco 44.
Nielsen 23-25.
Olivier 117.
Oriani 95.
Pacioli 44.
Padoa 49, 75.
Painlevé 55.
Pantanelli 12, 13.
de Paolis 65.
Pappo 33, 35, 44, 102.
Pascal B. 58, 61, 86.
Peano 53, 67, 81, 82.
Perseo 43.
Peuerbach 44.
Phragmen 128.
del Pezzo 58.
Picard 9, 55.
Pieri Erminia 65.
» Mario 65-76.
» Pellegrino 65.
Pincherle 16.
Pionchon 30.
Pitagora 43.
Pizzetti 21.
Plateau 110.
Platone 43.
Podetti 1, 33.
Poggendorff 117.
Poincaré 55, 69, 116, 123.
Prandtl 32,
Proclo 44.

Digitized by Google

Prudhomme 118.
Regiomantano 44.
Reinaud 97, 98.
Retico 45.
Reye 120.
Riccardi 13.
Riccati 29, 126.
Riemann 107, 112.
Rocca 2.
Rolle 27.
Rosen 98.
Rouché 26.
Russel 47-53, 75-81.
Salmon 67.
di San Vincenzo 128.
Scheffers 121-122.
Schlesinger L. 106, 111-112.
Schoute 110.
Schröter 120.
Schubert H. 67.
Schröder 80.
Segre 74.
Sella 125, 126.
Sereno 44.
Simon 127.
Simson 121.
Smith D. E. 10, 64.
Stäckel 116, 117.
Stamper 10-11.
Staudt 62, 67, 74, 87.
Steiner 86, 120.
Stevino 128.
Study 119, 122, 123.
Sturm C. 9.
» R. 120.
Tabit ibn Kurrah 44.
Talete 43.
Tannery J. 150.
» P. 114, 120.
Tartaglia 45.
Taylor 27, 28, 101, 108.
Teixeira 98-101.
Teone Alessandrino 44.
Teone Smirneo 44.
Teubner 31.
Thomae 71.
Thompson 71.
Tisserand 118.
Tolomeo Claudio 33, 43.
Torelli R. 63.
Torricelli 35.
Treutlein 120.
Turner 64.
Vailati 24.
Valerio 128.
Vieta 45, 113.
da Vinci Leonardo 44.
Vitale 2.
Vivanti 13, 23, 25, 107, 109, 109-110.
Viviani 2, 3, 39, 85, 94.
Vogt H. 102-106.
» W. 119-120.
Voigt 22.
Volterra 102.
Waesche 125, 126.
Wafa Abul 44.
Wallis 126.
Wangerin 124.
Weierstrass 26, 55, 100, 101, 109, 128.
Weber F. 10.
Weingarten 71.
Wessel 126.
Whitehead 47-53, 75-81.
Wiedmann 44.
Wieleitner 31, 42, 45-47, 127.
Wiman 128.
Witting 31.
Wohlwill 30.
Wronski 100.
Wyman 104.
Yentsu 32.
Zaremba 96.
Zenodoro 43.
Zenone 43.
Zermelo 80.
Zeuthen 67, 74.
Zoretti 53 57.

Digitized by Google

Digitized by Google

RETURN TO the circulation desk of any
University of California Library
or to the
NORTHERN REGIONAL LIBRARY FACILITY
Bldg. 400, Richmond Field Station
University of California
Richmond, CA 94804-4698

ALL BOOKS MAY BE RECALLED AFTER 7 DAYS
2-month loans may be renewed by calling
(415) 642-6233
1-year loans may be recharged by bringing books
to NRLF
Renewals and recharges may be made 4 days
prior to due date

DUE AS STAMPED BELOW

PHOTOCOPY MAY 20 '88

JUL 08 199

RECEIVED

JUL 29 1996

CIRCULATION DEPT.

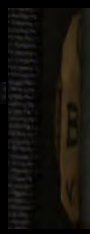
Digitized by Google

YD 64851

U. C. BERKELEY LIBRARIES

C057107918

Digitized by Google



Digitized by Google